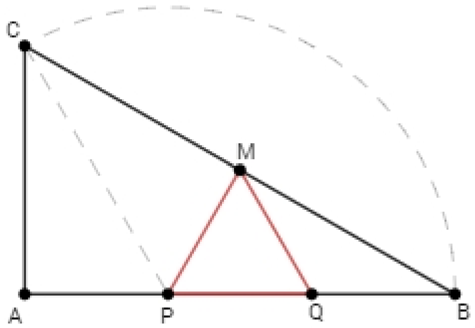
TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 885.</u> (Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpíada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemáticas (2004)) El triángulo ABC es rectángulo en A y M es el punto medio de la hipotenusa $BC.$ Sobre el cateto mayor $AB,$ se marca el punto P tal que $CP = BP$ y, sobre el segmento $PB,$ se marca el punto Q tal que el triángulo PQM es equilátero. Calcular $(PQM),$ sabiendo que $(ABC) = 27.$



<u>Solución:</u>

Como los puntos M y P equidistan de B y $C,$ entonces, la recta MP es la mediatriz del segmento $BC,$ por lo que:

$$\measuredangle PMB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \measuredangle QMB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

y:

❶ Considerando el triángulo $MQB,$ resulta que:

$$\measuredangle MBQ = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} = \measuredangle QMB$$

por lo que este triángulo es isósceles y, por tanto, $QM = QB.$

❷ Como el triángulo CPB es isósceles, resulta que:

$$\measuredangle PCB = \measuredangle CBP = \frac{\pi}{6}$$

❸ Considerando el triángulo $ABC,$ resulta que:

$$\measuredangle ACB = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

por lo que:

$$\measuredangle ACP = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

❹ Considerando el triángulo $APC,$ resulta que:

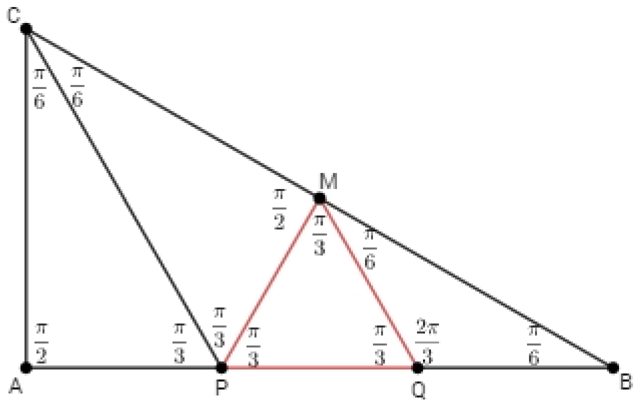
$$\measuredangle CPA = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

❺ Considerando el triángulo $PMC,$ resulta que:

$$\measuredangle MPC = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Una vez visto todo esto, tenemos la siguiente figura:



en la que se aprecia que los triángulos rectángulos CAP, PMC y BMP son idénticos, por lo que:

$$(BMP) = \frac{(ABC)}{3} = 9$$

y, además, como:

$$(MQB) = \frac{QB^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{QM^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = (PQB)$$

entonces:

$$(PQB) = \frac{(BMP)}{2} = \frac{9}{2}$$