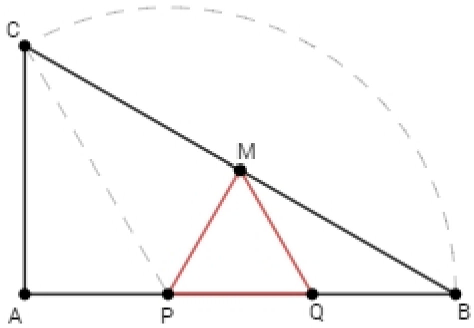
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 885. (Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpíada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemáticas (2004)) El triángulo ABC es rectángulo en A y M es el punto medio de la hipotenusa $BC.$ Sobre el cateto mayor $AB,$ se marca el punto P tal que $CP = BP$ y, sobre el segmento $PB,$ se marca el punto Q tal que el triángulo PQM es equilátero. Calcular $(PQM),$ sabiendo que $(ABC) = 27.$



Solución:

Considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto A y cuyo eje de abscisas el la recta $AB,$ resulta que:

$$\begin{cases} B = (c, 0) \\ C = (0, b) \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

y, como la recta MP es la mediatriz del segmento $BC,$ su ecuación es:

$$2cx - 2cy + b^2 - c^2 = 0$$

por lo que $P = \left(\frac{c^2 - b^2}{2c}, 0\right).$ Además, como $\measuredangle CPM = \frac{\pi}{3},$ la pendiente de esta recta es:

$$\sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{c}{b}$$

y, como $bc = 54,$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} bc = 54 \\ c = \sqrt{3}\, b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3\sqrt[4]{12} \\ c = 3\sqrt[4]{108} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = (\sqrt[4]{108}, 0) \\ M = \left(\frac{3\sqrt[4]{108}}{2}, \frac{3\sqrt[4]{12}}{2}\right) \end{cases}$$

Finalmente:

$$(PQM) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) PM^2}{2} = \frac{\sqrt{3}\left[\left(\frac{3\sqrt[4]{108}}{2} - \sqrt[4]{108}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt[4]{12}}{2}\right)^2\right]}{4} = \frac{9}{2}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega