

Problema 885

El triangle $\triangle ABC$ és rectangle en A i R és el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$. Sobre el catet major $\overline{AB}$ es marca el punt P tal que $\overline{CP} = \overline{BP}$ i sobre el segment $\overline{BP}$ es marca el punt Q tal que el triangle $\triangle PQR$ és equilàter. Si l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és 27, calculeu l'àrea del triangle $\triangle PQR$.

VIII Concurso de Primavera de Matemática 2004.

Solució 1, de Ricard Peiró:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ aleshores, P pertany a la mediatriu del segment $\overline{BC}$.

Aleshores, $\angle PRB = 90^\circ$.

Si $\triangle PQR$ és equilàter $\angle RPB = 60^\circ$.

Aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$, $A = 90^\circ$.

Siga S l'àrea del triangle equilàter $\triangle PQR$. $\angle RQB = 120^\circ$. Aleshores, $\angle QRB = 30^\circ$.

El triangle $\triangle BQR$ és isòsceles, aleshores, $\overline{PQ} = \overline{RQ} = \overline{QB}$.

Aleshores, $S_{PQR} = S_{QBR} = S$.

Per la propietat de la mitjana $\overline{AR}$ del triangle rectangle $\triangle ABC$, $\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BR}$.

Aleshores, el triangle $\triangle ABR$ és isòsceles: $\angle APR = 120^\circ$. $\angle RBQ = 30^\circ$.

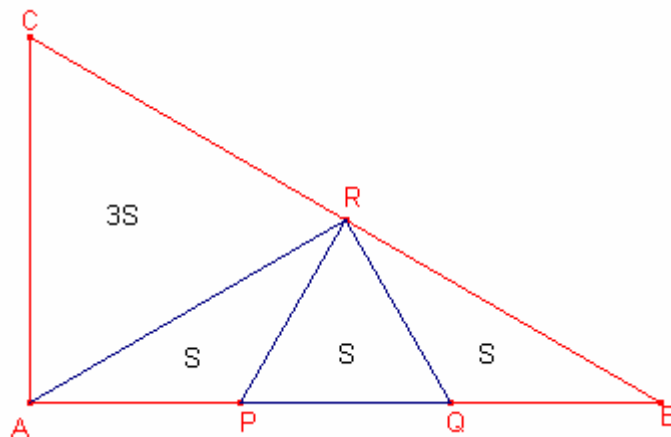
Aleshores, els triangles $\triangle APR$, $\triangle BQR$ són iguals.

Aleshores, $S_{APR} = S_{QBR} = S$.

Els triangles $\triangle ABR$, $\triangle ACR$ tenen la mateixa base sobre la recta BC i la mateixa altura. Aleshores, $S_{ACR} = S_{ABR} = 3S$.

Aleshores, $S_{ABC} = 6S = 27$.

Aleshores l'àrea del triangle $\triangle PQR$ és: $S = \frac{9}{2}$.



Solució 2:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ aleshores, P pertany a la mediatriu del segment $\overline{BC}$. Aleshores, $\angle PRB = 90^\circ$.

Si $\triangle PQR$ és equilàter $\angle RPB = 60^\circ$.

Aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$, $A = 90^\circ$.

Siga $\overline{AB} = c$, aleshores, $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és 27:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6} c^2 = 27.$$

$$\text{Aleshores, } c^2 = 54\sqrt{3}.$$

Els triangles rectangles $\triangle ABC$, $\triangle RBP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}c}{c}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{PR} = \frac{1}{3}c.$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle PQR$ és:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{PR}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{9} c^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} 54\sqrt{3} = \frac{9}{2}.$$