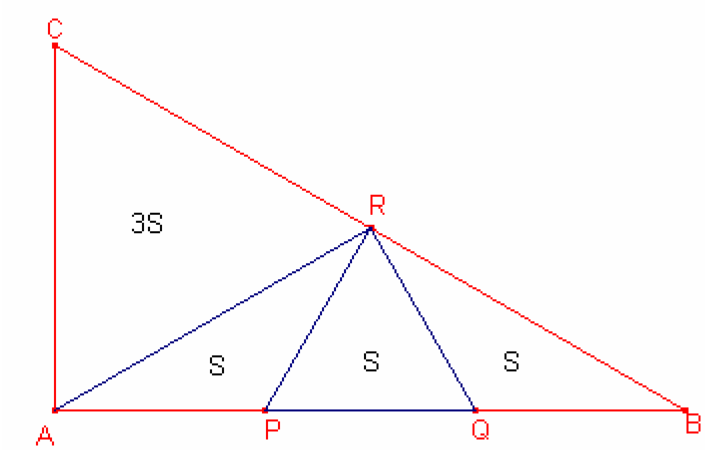
Problema 885.-

Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpiada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemáticas.

El triángulo ABC es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC. Sobre el cateto mayor AB se marca el punto P tal que CP=BP y sobre el segmento BP se marca el punto Q tal que el triángulo PQR es equilátero. Si el área del triángulo ABC es 27, calcula el área del triángulo PQR.

VIII Concurso de Primavera de Matemáticas (2004) (p. 97)



Solución 1, de Ricard Peiró:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ entonces, P pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Entonces, $\angle PRB = 90^o$.

Si $\overset{\Delta}{PQR}$ es equilátero $\angle RPB = 60^o$.

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es $B = 30^o, C = 60^o, A = 90^o$.

Sea S el área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{PQR}$.

$\angle RQB = 120^o$. Entonces, $\angle QRB = 30^o$.

El triángulo $\overset{\Delta}{BQR}$ es isósceles, entonces, $\overline{PQ} = \overline{RQ} = \overline{QB}$.

Entonces, $S_{PQR} = S_{QBR} = S$.

Por la propiedad de la mediana $\overline{AR}$ del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BR}$.

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{ABR}$ es isósceles:

$\angle APR = 120^o$. $\angle RBQ = 30^o$.

Entonces, los triángulos $\overset{\Delta}{APR}$, $\overset{\Delta}{BQR}$ son iguales.

Entonces, $S_{APR} = S_{QBR} = S$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABR}$, $\overset{\Delta}{ACR}$ tienen la misma base sobre la recta BC y la misma altura.

Entonces, $S_{ACR} = S_{ABR} = 3S$.

Entonces, $S_{ABC} = 6S = 27$.

Entonces el área del triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$ es: $S = \frac{9}{2}$.

Solución 2:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ entonces, P pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Entonces, $\angle PRB = 90^o$.

Si $\overset{\Delta}{PQR}$ es equilátero $\angle RPB = 60^o$.

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es $B = 30^o, C = 60^o, A = 90^o$.

Sea $\overline{AB} = c$, entonces, $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es 27:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6}c^2 = 27.$$

Entonces, $c^2 = 54\sqrt{3}$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{RBP}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}c}{c}.$$

Entonces, $\overline{PR} = \frac{1}{3}c$.

El área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{PQR}$ es:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PR}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}54\sqrt{3} = \frac{9}{2}.$$