Problema 886.-

Sean r_a, r_b, r_c los exinradios de un triángulo ABC. Probar que $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R$.

Comunicación anónima (2018)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sean conocidas las siguientes relaciones métricas de interés:
$r_a r_b r_c = \frac{S^2}{r}.\text{(I)},$ siendo $S = \text{Área[ABC]}$
$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2.\text{(II)},$ siendo $p = \frac{a+b+c}{2}$
$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$ (III)
$S = pr.(IV)$

El valor de la siguiente expresión:

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = -r^3 + r^2(r_a + r_b + r_c) - r(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) + r_a r_b r_c$$

Sustituyendo ahora con los valores de $(I, II, III\ y\ IV)$:

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = -r^3 + r^2(r_a + r_b + r_c) - r(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) + r_a r_b r_c;$$
$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = -r^3 + r^2(4R + r) - rp^2 + \frac{S^2}{r} = 4r^2R$$
$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R, \quad cqd. \qquad \blacksquare$$