

**Lema** Dado el triángulo  $ABC$  de lados  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Los exinradios del  $\triangle ABC$  son

$$\begin{aligned}r_A &= \frac{s}{s-a}r \\r_B &= \frac{s}{s-b}r \\r_C &= \frac{s}{s-c}r\end{aligned}$$

siendo  $s = \frac{a+b+c}{2}$  su semiperímetro

*La demostración en la página 28 del libro Euclidean Geometry de Paul Yiu*

**Problema 1 ((Anónimo))** Sean  $r_A, r_B, r_C$  los exinradios de un triángulo  $ABC$  probar que

$$(r_A - r)(r_B - r)(r_C - r) = 4r^2 R$$

donde  $r$  es el radio del incírculo y  $R$  el radio del circuncírculo

### Solución

Por el lema anterior

$$\begin{aligned}r_A &= \frac{s}{s-a}r \\r_B &= \frac{s}{s-b}r \\r_C &= \frac{s}{s-c}r\end{aligned}$$

por lo que

$$(r_A - r)(r_B - r)(r_C - r) = \frac{abcr^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = sr \frac{abcr^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Como  $sr = S$  y  $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

$$(r_A - r)(r_B - r)(r_C - r) = \frac{abcr^2}{S}$$

Al ser  $S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 4R = \frac{abc}{S}$  obtenemos finalmente

$$(r_A - r)(r_B - r)(r_C - r) = 4Rr^2 \text{ c.q.d}$$

Juan José Isach Mayo

Profesor de Matemáticas (Jubilado)

Valencia