

## TRIÁNGULOS CABRI

**Problema 886.** (Anónimo) Sean  $r_a$ ,  $r_b$  y  $r_c$  los exinradios de un triángulo  $ABC$  con inradio  $r$  y circunradio  $R$ . Probar que:

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R$$

Solución:

Si  $S$  es el doble del área del triángulo  $ABC$  y  $s = \frac{a+b+c}{2}$  es su semiperímetro, como:

$$\begin{cases} r_a = \frac{S}{-a+b+c} = \frac{2rs}{-a+b+c} \\ r_b = \frac{S}{a-b+c} = \frac{2rs}{a-b+c} \\ r_c = \frac{S}{a+b-c} = \frac{2rs}{a+b-c} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{r^2} &= \frac{\left(\frac{2rs}{-a+b+c} - r\right)\left(\frac{2rs}{a-b+c} - r\right)\left(\frac{2rs}{a+b-c} - r\right)}{r^2} \\ &= r\left(\frac{a+b+c}{-a+b+c} - 1\right)\left(\frac{a+b+c}{a-b+c} - 1\right)\left(\frac{a+b+c}{a+b-c} - r\right) \\ &= r\left(\frac{2a}{-a+b+c} + \frac{2b}{a-b+c} + \frac{2c}{a+b-c}\right) \\ &= \frac{8abcr}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{abcr}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{\frac{abcr}{s}}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ &= \frac{abcr}{r^2s} \\ &= \frac{abc}{rs} \\ &= \frac{abc}{\frac{S}{2}} \\ &= 4\left(\frac{abc}{2S}\right) \\ &= 4R \end{aligned}$$

por lo que:

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R$$