

Problema 886

Sean r_a, r_b, r_c los exinradios del triángulo $\triangle ABC$:

Sean r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente.

Probar que $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R$.

Solución de Ricard Peiró i Estruch.

La proporción entre los radios de la circunferencia inscrita y exinscrita es:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}. \text{ Entonces, } r_a = \frac{p}{p-a} r.$$

El área del triángulo $\triangle ABC$ es $S = p \cdot r = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ on $p = \frac{a+b+c}{2}$.

$$\begin{aligned} (r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) &= \left(\frac{p}{p-a} - 1 \right) r \left(\frac{p}{p-b} - 1 \right) r \left(\frac{p}{p-c} - 1 \right) r = \\ &= \left(\frac{a}{p-a} \right) \left(\frac{b}{p-b} \right) \left(\frac{c}{p-c} \right) r^3 = \\ &= \frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} r^3 = \\ &= \frac{4R \cdot S}{pr^2} r^3 = \\ &= \frac{4R \cdot S}{r \cdot S} r^3 = 4r^2R. \end{aligned}$$