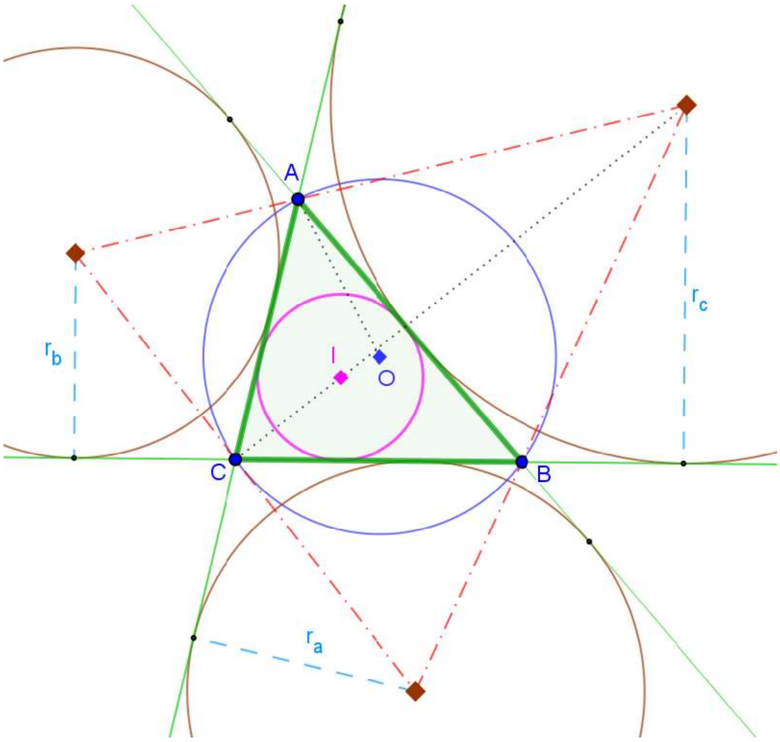
Quincena del 1 al 15 de Septiembre de 2018

***Problema* 886.**

Sean r_a, r_b, r_c los exinradios de un triángulo ABC. Probar que $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4r^2R$.

Comunicación anónima (2018).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Llamando s al semiperímetro del triángulo, $s_a = s - a$ y R al radio de la circunferencia circunscrita, sabemos que se verifica

$$s_a r_a = sr = \text{Área}(ABC) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s s_a s_b s_c} \qquad (E)$$

Con esto tenemos $r_a - r = \frac{1}{ss_a}(ss_a r_a - s_a sr) = \frac{sr}{ss_a}(s - s_a) = \frac{ra}{s_a}$. Sustituyendo en la expresión del enunciado tenemos $(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = \frac{ab\quad{}^{3}}{s_a s_b s_c}$.

De (E) obtenemos $s_a s_b s_c = r^2 s$ y también $abc = 4Rrs$. Sustituyendo ambos tenemos ahora

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = \frac{abcr^3}{s_a s_b s_c} = \frac{abc \cdot r}{s} = 4Rr^2$$

como queríamos demostrar. ■