1. Teoremas previos

Teorema de Euler La distancia d entre el circuncentro O y el incentro I del $\triangle ABC$ es

$$d^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$$

donde R, r son su circumradio e inradio respectivamente

La demostración de este teorema se puede ver en *Euclidean Geometry de Paul Yiu Pag 43*

Teorema Dado el $\triangle ABC$ cuyo incentro es I Las distancia del incentro a cada uno de los vértices viene dada por las relaciones

$$AI = \frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{s}, \quad BI = \frac{\sqrt{acs(s-b)}}{s} \text{ y } CI = \frac{\sqrt{abs(s-c)}}{s}$$

donde s es el semiperímetro

La demostración la adjunto al final del documento en el apéndice

Corolario Si I es el incentro del triángulo se verifica que

$$AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$$

Solución

$$AI \cdot BI \cdot CI = \tfrac{abc\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s^2}{}^{1} = \tfrac{S^2 4R}{s^2} = {}^{2}4Rr^2$$

2. Problema Francisco Damián Aranda 2018

Problema 1 *Sean $A'_1, B''C'$ puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde se intersecan las bisectrices interiores desde los vértices A, B y C respectivamente . Demuestra que*

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = 2R^2 r$$

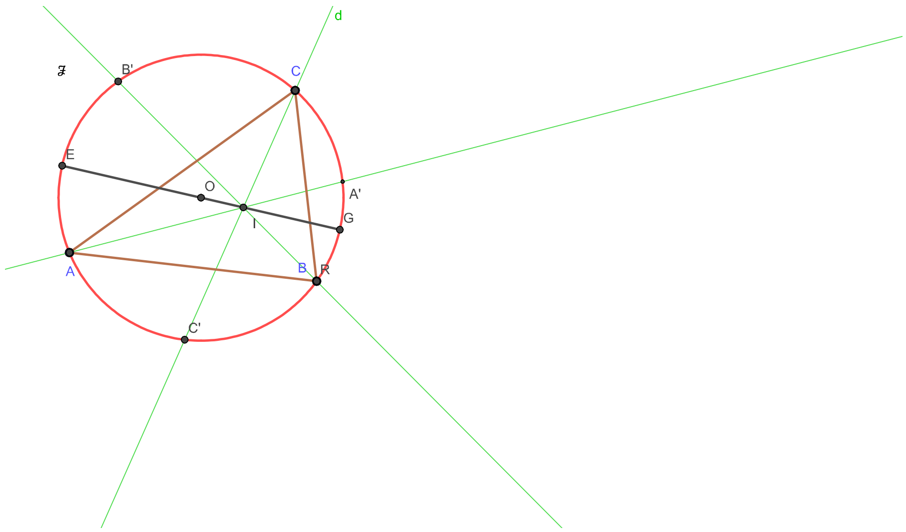
siendo R y r los radios del circumcirculo e incírculo

Solución
Sean I y O el incentro y el circuncentro sabemos que

$$IO^2 = R^2 - 2Rr \tag{a}$$

Dibujado el problema trazando además el diámetro GE asociado al segmento OI

[1] $abc = 4RS$
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
[2] $\frac{S}{s} = r$



Sabemos que la potencia del punto I con respecto al circumcírculo $\mathcal{F}$ es

$$Pot_{\mathcal{F}}(I) = IG{\cdot}IE = (R - OI)(R + OI) = (R^2 - OI^2)$$

Por la relación (a)

$$Pot_{\mathcal{F}}(I) = R^2 - OI^2 = 2Rr$$

Como además

$$IA'{\cdot}IA = IB'{\cdot}IB = IC'{\cdot}IC = 2Rr$$

Calcular $A'I \cdot B'I \cdot C'I$ es equivalente a calcular

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = \frac{8R^3r^3}{IA \cdot IB \cdot IC}$$

Como $IA \cdot IB \cdot \ IC \ = 4Rr^2$ por el corolario anterior

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = \frac{8R^3r^3}{4Rr^2} = 2R^2r \quad \text{c.q-d}$$

3. Apéndice

Teorema Dado el $\triangle ABC$ cuyo incentro es $\dot{I}$ Las distancia del incentro a cada uno de los vértices viene dada por las relaciones

$$AI = \frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{s}, \quad BI = \frac{\sqrt{acs(s-b)}}{s} \text{ y } CI = \frac{\sqrt{abs(s-c)}}{s}$$

donde s es el semiperímetro

Demostración
Sea $\alpha = \widehat{BAC}$ y r el radio de la circunferencia inscrita
Voy a determinar la expresión para AI

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Por el teorema del coseno

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\ & \text{Aislando } \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{bc\,(a+b-c)\,(a-b+c)}{4b^2c^2 \quad 2} = \frac{(s-c)(s-b)}{bc} \end{aligned}$$

Como $r = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$;entonces

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}}{\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}} = \frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{s} \text{ c.q.d}$$

Las otras expresiones a demostrar se pueden deducir por permutación circular