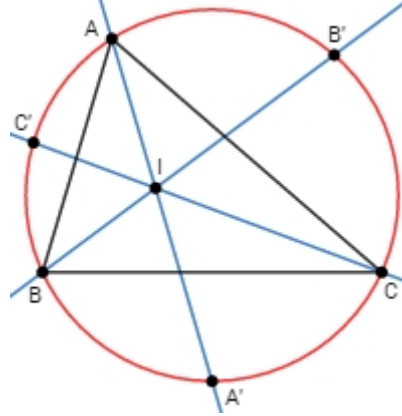


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 887. (Propuesto por Florentino-Damián Aranda Ballesteros) Sean A' , B' y C' los puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde intersecan las bisectrices interiores trazadas desde los vértices A , B y C , respectivamente. Probar que:

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = 2R^2r$$

siendo r y R el inradio y el circunradio, respectivamente, del triángulo ABC .



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

y las ecuaciones de las bisectrices interiores correspondientes a sus tres vértices son:

$$\begin{cases} AA' \equiv 0 = cy - bz \\ BB' \equiv 0 = cx - az \\ CC' \equiv 0 = bx - ay \end{cases}$$

por lo que, resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} A' = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c)) = \left(-\frac{a^2}{(-a+b+c)(a+b+c)} : \frac{b(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} : \frac{c(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right) \\ B' = (a(a+c) : -b^2 : c(a+c)) = \left(\frac{a(a+c)}{(a-b+c)(a+b+c)} : -\frac{b^2}{(a-b+c)(a+b+c)} : \frac{c(a+c)}{(a-b+c)(a+b+c)} \right) \\ C' = (a(a+b) : b(a+b) : -c^2) = \left(\frac{a(a+b)}{(a+b+c)(a+b-c)} : \frac{b(a+b)}{(a+b+c)(a+b-c)} : -\frac{c^2}{(a+b+c)(a+b-c)} \right) \end{cases}$$

y como:

$$I = (a : b : c) = \left(\frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c} \right)$$

TRIÁNGULOS CABRI

entonces:

$$\begin{aligned} A'I^2 &= S_A \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{a^2}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{b(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{c(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 \\ &= \frac{a^2bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'I^2 &= S_A \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{a(a+c)}{(a-b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{a+b+c} + \frac{b^2}{(a-b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{c(a+c)}{(a-b+c)(a+b+c)} \right)^2 \\ &= \frac{ab^2c}{(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'I^2 &= S_A \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{a(a+b)}{(a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{b(a+b)}{(a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{a+b+c} + \frac{c^2}{(a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 \\ &= \frac{abc^2}{(a+b-c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} A'I^2 \cdot B'I^2 \cdot C'I^2 &= \frac{a^2bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} \cdot \frac{ab^2c}{(a-b+c)(a+b+c)} \cdot \frac{abc^2}{(a+b-c)(a+b+c)} \\ &= \frac{a^4b^4c^4}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)^3} \\ &= \frac{a^4b^4c^4}{64r^2s^4} \\ &= 4 \left(\frac{abc}{4rs} \right)^4 r^2 \\ &= 4 \left(\frac{abc}{2S} \right)^4 r^2 \\ &= 4R^4r^2 \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = 2R^2r$$