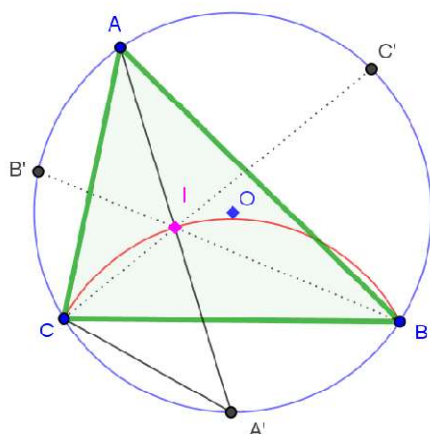


Problema 887.

Sean los puntos A', B', C' de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde se intersecan las bisectrices interiores trazadas desde los vértices A, B, C respectivamente. Se verifica entonces la relación $A'I \cdot B'I \cdot C'I = 2R^2r$.

Aranda, F. D. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



El punto A' está en la mediatriz de BC . La circunferencia de centro A' que pasa por B y C , también pasa por I . Ya probamos en el problema 255 de esta revista (diciembre de 2005 y también nº 337 de septiembre de 2006) que el arco de la misma que contiene a B y C , no exterior al triángulo, es el lugar geométrico de los incentros de los triángulos obtenidos variando A sobre la circunscrita (arco capaz del ángulo $90 + \frac{\alpha}{2}$).

El triángulo ACA' está inscrito en la esta circunferencia, por ello $A'I = A'C = 2R \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, y análogamente

para $B'I, C'I$. De ahí resulta $A'I \cdot B'I \cdot C'I = 8R^3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$.

Calculemos ahora el producto de estos senos.

Llamando s al semiperímetro del triángulo, $s_a = s - a$ y R al radio de la circunferencia circunscrita, sabemos que se verifica

$$s_a r_a = sr = \text{Área}(ABC) = \Delta = \frac{abc}{4R} = \sqrt{ss_a s_b s_c} \quad (E)$$

A partir de $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b s_c}{bc}}$ y expresiones análogas para los otros ángulos obtenemos, con la ayuda de (E),

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$$

y con ello

$$A'I \cdot B'I \cdot C'I = 8R^3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = 8R^3 \cdot \frac{r}{4R} = 2R^2r$$

como queríamos demostrar. ■