Propuesto por Florentino Damián Aranda Ballesteros.

Problema 888.-

Sean los puntos A', B'', C'' de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde se intersecan las bisectrices interior trazada desde A y las bisectrices exteriores trazadas desde los vértices $B\ y\ C$, respectivamente. Sean $I_a = exincentro$, el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos B y C y r_a, el radio de la circunferencia exinscrita del ángulo A.

Se verifica entonces la relación $A'I \cdot B''I \cdot C''I = 2R^2 r_a$.

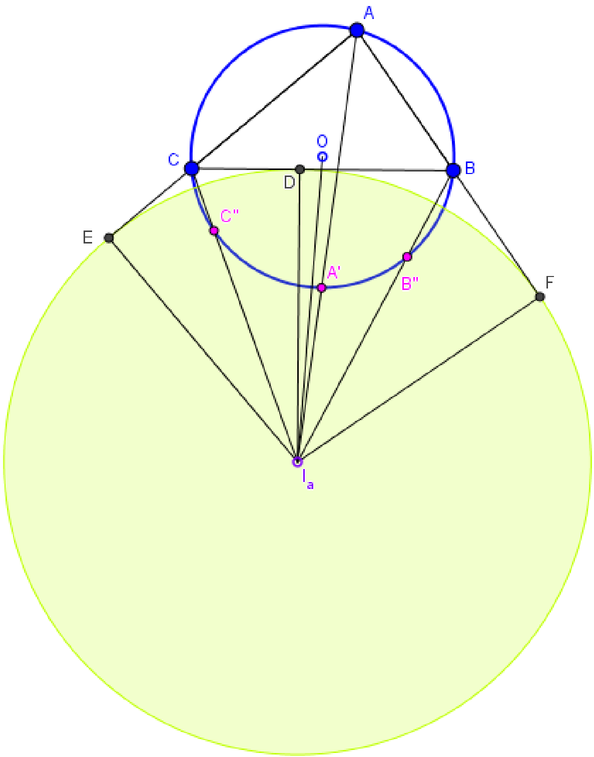
Aranda, F. D. (2018): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

$\boldsymbol{Dem.-}$

A partir de la potencia del punto I_a sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, se tiene que:

$$\boldsymbol{AI_a \cdot A'I_a = BI_a . B''I_a = CI_a . C''I_a = OI_a^2 - R^2 = \left(R^2 + 2Rr_a\right) - R^2 = 2Rr_a}$$



Por tanto,

$$\boldsymbol{(AI_a \cdot BI_a . CI_a).(A'I_a . B''I_a . C''I_a) = 8R^3 {r_a}^3}$$

$$\boldsymbol{A'I_a . B''I_a . C''I_a = \frac{8R^3 {r_a}^3}{4Rr_a^2} = 2R^2 r_a}$$