

1. Teoremas previos

Theorem 1 Dado el triángulo ABC . Sean E_A , al vértices A y sea O su circuncentro Si denominamos por $d_A = E_A I$; entonces si R es el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ y r_A el radio de la circunferencias exinscrita del vértice A ; siempre se verifica que

$$d_A^2 = R^2 + 2Rr_A$$

La demostración se encuentra en el libro An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle - Altshiller-Court N. College Geometry (Dover 2007) en la pag 86)

Corolario Si E_A es el exincentro asociado a A ; entonces

$$E_A A = \sqrt{\frac{bcs}{(s-a)}}, E_A B = \sqrt{\frac{ac(s-c)}{(s-a)}} \text{ y } E_A C = \sqrt{\frac{ab(s-b)}{(s-a)}}$$

1.1. Problema propuesto por Florentino Damián Aranda Ballesteros

Problema Sean A', B'', C'' puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde se intersecan las bisectriz interior trazada desde A y las bisectrices exteriores trazadas desde los vértices B y C respectivamente. Sean E_a el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos B y C y r_a el radio de la circunferencia exinscrita del ángulo A Se verifica entonces la relación

$$E_a A' \cdot E_a B'' \cdot E_a C'' = 2R^2 r_a$$

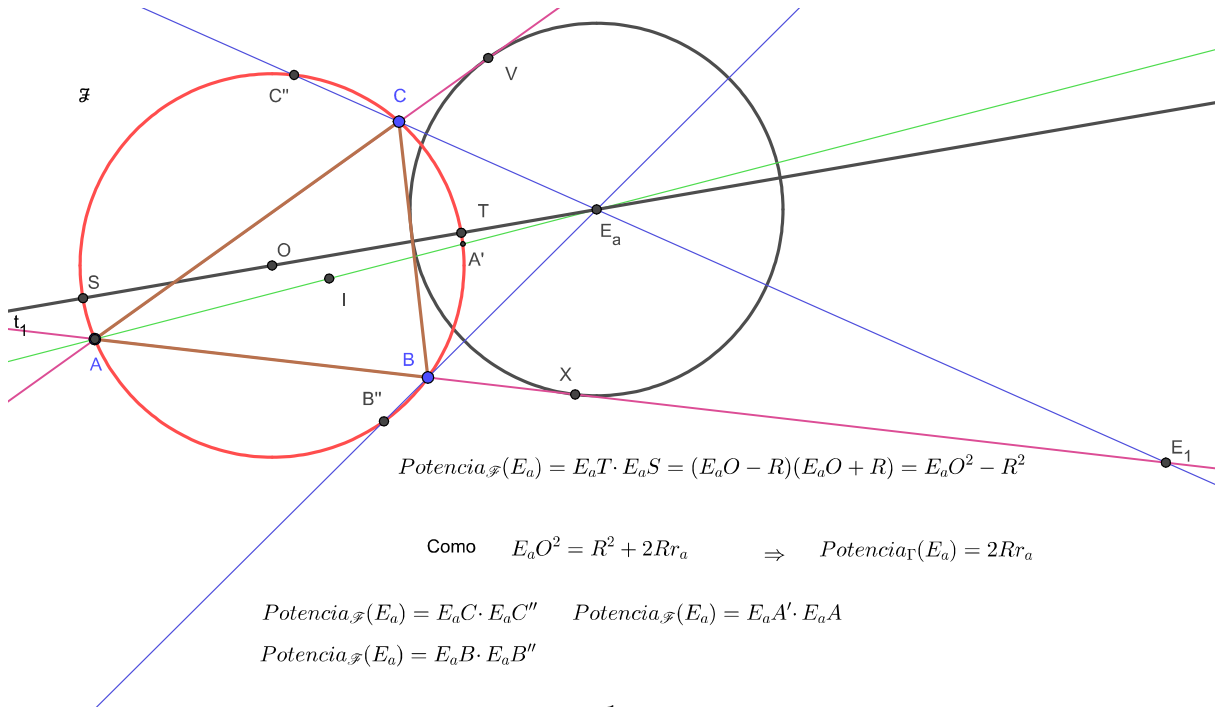
Solución

Sabemos que la distancia de E_a al circuncentro O del triángulo ABC es

$$E_a O^2 = R^2 + 2Rr_a \quad (a)$$

donde R es el radio del circuncírculo $\mathcal{F}$ y r_a radio del exincírculo asociado al vértice A .

Si nos fijamos en el dibujo



Sea el diámetro ST de $\mathcal{F}$ asociado al segmento OE_a : La potencia del punto E_a con respecto a $\mathcal{F}$ es

$$Pot_{\mathcal{F}}(E_a) = E_aT \cdot E_aS$$

Por $\left[\begin{array}{l} E_aT = E_aO - OT = E_aO - R \\ E_aS = E_aO + OS = E_aO + OT = E_aO + R \end{array} \right]$ y por (a)

$$Pot_{\mathcal{F}}(E_a) = E_aO^2 - R^2 = 2Rr_a$$

Como además $Pot_{\mathcal{F}}(E_a) = \begin{cases} E_aB \cdot E_aB'' \\ E_aC \cdot E_aC'' \\ E_aA \cdot E_aA' \end{cases}$

Calcular el producto $E_aA' \cdot E_aB'' \cdot E_aC''$ es equivalente a determinar

$$E_aA' \cdot E_aB'' \cdot E_aC'' = \frac{Pot_{\mathcal{F}}(E_a)}{E_aA} \frac{Pot_{\mathcal{F}}(E_a)}{E_aB} \frac{Pot_{\mathcal{F}}(E_a)}{E_aC} = \frac{8R^3r_a^3}{E_aA \cdot E_aB \cdot E_aC}$$

Como por un corolario anterior los segmentos

$$E_aA = \sqrt{\frac{bcs}{(s-a)}}, E_aB = \sqrt{\frac{ac(s-c)}{(s-a)}} \text{ y } E_aC = \sqrt{\frac{ab(s-b)}{(s-a)}}$$

entonces

$$E_aA \cdot E_aB \cdot E_aC = \frac{abc}{(s-a)^2} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Como $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = S$ y $abc = 4RS$

$$E_aA \cdot E_aB \cdot E_aC = \frac{4RS^2}{(s-a)^2}$$

Al ser $r_a = \frac{S_{ABC}}{s-a}$ ¹; entonces

$$E_aA \cdot E_aB \cdot E_aC = 4Rr_a^2$$

A final; obtenemos

$$E_aA' \cdot E_aB'' \cdot E_aC'' = \frac{8R^3r_a^3}{4Rr_a^2} = 2R^2r_a$$

¹Euclidean Geometry de Paul Yiu Pag 28