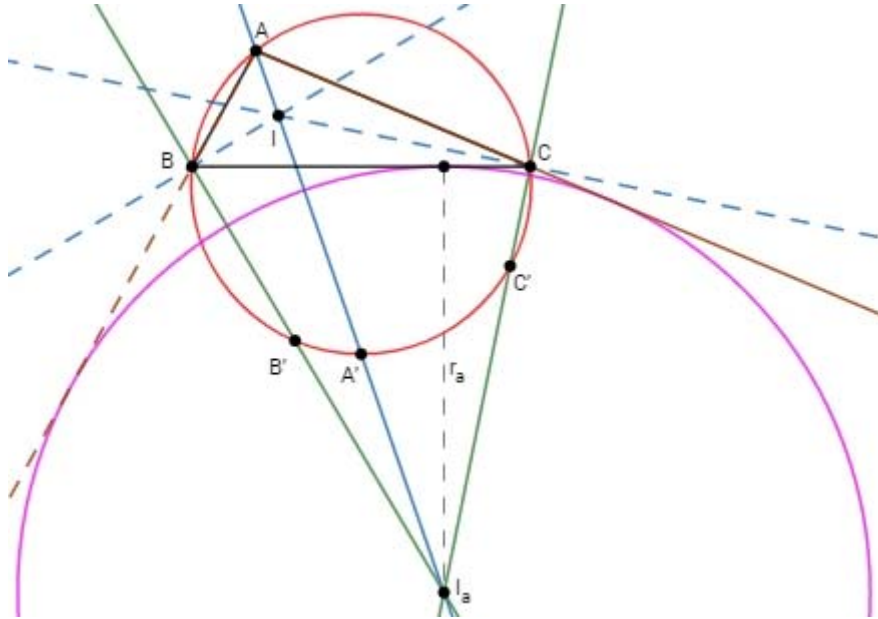


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 888. (Propuesto por Florentino-Damián Aranda Ballesteros) Sean A' , B' y C' los puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde intersecan la bisectriz interior trazada desde el vértice A y las bisectrices exteriores trazadas desde los vértices B y C , respectivamente. Probar que:

$$A'I_a \cdot B'I_a \cdot C'I_a = 2R^2 r_a$$

siendo r_a y R el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente al vértice A y el circunradio, respectivamente, del triángulo ABC .



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0$$

y las ecuaciones de las tres bisectrices consideradas son:

$$\begin{cases} AA' \equiv 0 = cy - bz \\ BB' \equiv 0 = cx + az \\ CC' \equiv 0 = bx + ay \end{cases}$$

por lo que, resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} A' = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c)) = \left(-\frac{a^2}{(-a+b+c)(a+b+c)} : \frac{b(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} : \frac{c(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right) \\ B' = (a(c-a) : -b^2 : c(a-c)) = \left(\frac{a(c-a)}{(-a+b+c)(a+b-c)} : \frac{b^2}{(-a+b+c)(a+b-c)} : \frac{c(a-c)}{(-a+b+c)(a+b-c)} \right) \\ C' = (a(b-a) : b(a-b) : -c^2) = \left(\frac{a(b-a)}{(-a+b+c)(a-b+c)} : \frac{b(a-b)}{(-a+b+c)(a-b+c)} : \frac{c^2}{(-a+b+c)(a-b+c)} \right) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

y como:

$$I_a = (-a : b : c) = \left(-\frac{a}{-a+b+c} : \frac{b}{-a+b+c} : \frac{c}{-a+b+c} \right)$$

entonces:

$$\begin{aligned} A'I_a^2 &= S_A \left(-\frac{a}{-a+b+c} + \frac{a^2}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{-a+b+c} - \frac{b(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{-a+b+c} - \frac{c(b+c)}{(-a+b+c)(a+b+c)} \right)^2 \\ &= \frac{a^2bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'I_a^2 &= S_A \left(-\frac{a}{-a+b+c} - \frac{a(c-a)}{(-a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{-a+b+c} - \frac{b^2}{(-a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{-a+b+c} - \frac{c(a-c)}{(-a+b+c)(a+b-c)} \right)^2 \\ &= \frac{ab^2c}{(-a+b+c)(a+b-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'I_a^2 &= S_A \left(-\frac{a}{-a+b+c} - \frac{a(b-a)}{(-a+b+c)(a-b+c)} \right)^2 + S_B \left(\frac{b}{-a+b+c} - \frac{b(a-b)}{(-a+b+c)(a-b+c)} \right)^2 + S_C \left(\frac{c}{-a+b+c} - \frac{c^2}{(-a+b+c)(a-b+c)} \right)^2 \\ &= \frac{abc^2}{(-a+b+c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} A'I_a^2 \cdot B'I_a^2 \cdot C'I_a^2 &= \frac{a^2bc}{(-a+b+c)(a+b+c)} \cdot \frac{ab^2c}{(-a+b+c)(a+b-c)} \cdot \frac{abc^2}{(-a+b+c)(a-b+c)} \\ &= \frac{a^4b^4c^4}{(-a+b+c)^3(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)} \\ &= \frac{a^4b^4c^4}{4S^2(-a+b+c)^2} \\ &= \left(\frac{a^4b^4c^4}{4S^4} \right) r_a^2 \\ &= 4 \left(\frac{abc}{2S} \right)^4 r_a^2 \\ &= 4R^4 r_a^2 \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$A'I_a \cdot B'I_a \cdot C'I_a = 2R^2 r_a$$