

### Problema n° 888

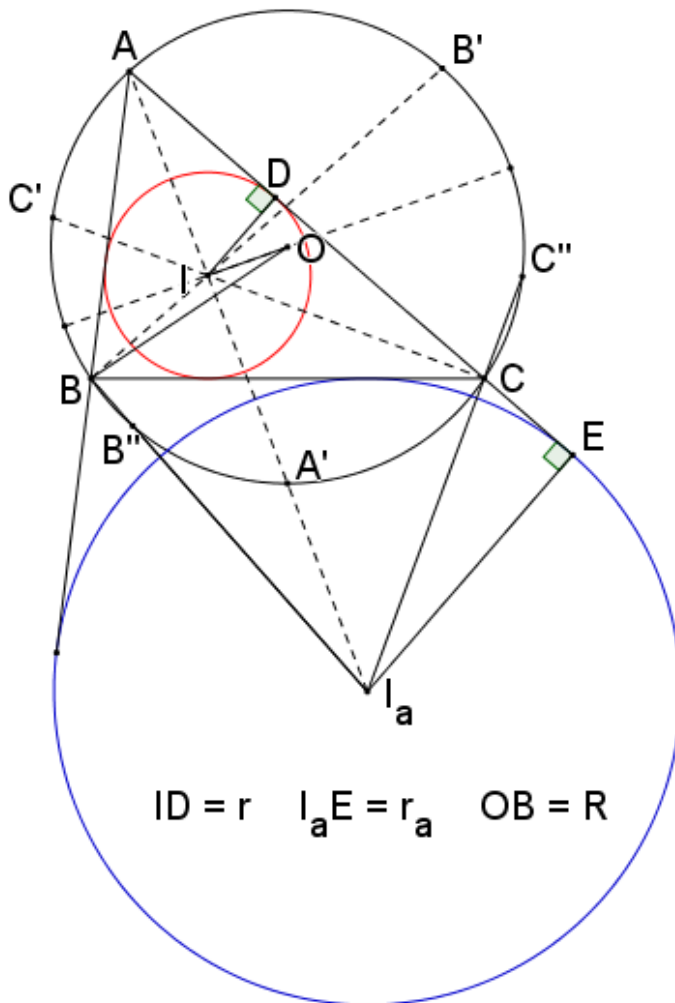
#### Propuesto por Florentino Damián Aranda Ballesteros

Sean los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C''$  de la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$  donde se intersecan la bisectriz interior trazada desde  $A$  y las bisectrices exteriores trazadas desde los vértices  $B$  y  $C$ , respectivamente. Sean  $I_a$ , el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos  $B$  y  $C$ , y  $r_a$  el radio de la circunferencia exinscrita del ángulo  $A$ .

Se verifica entonces la relación  $A'I_aB''I_aC''I_a = 2R^2r_a$

Aranda, F. D. (2018) : Comunicación personal.

#### Solution proposée par Philippe Fondanaiche



D'après les résultats du problème n°884, on sait que  $IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2$  et  $I_aA \cdot I_aB \cdot I_aC = 4Rr_a^2$ . Soient  $D$  et  $E$  les points de contact avec la droite  $AC$  du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans le secteur de l'angle en  $A$ .

Les triangles rectangles  $AID$  et  $AI_aE$  sont semblables. D'où  $I_aA/IA = I_aE/ID = r_a/r$ .

Par ailleurs le triangle  $IBI_a$  est rectangle et admet  $II_a$  pour hypoténuse dont  $A'$  est le milieu.

Donc  $I_aA' = IA'$  et  $I_aA' \cdot I_aA = IA' \cdot IA \cdot r_a/r$

D'après les résultats du problème n°887, on a  $IA \cdot IA' = 2Rr$ .

D'où  $I_aA' \cdot I_aA = 2Rr_a$  et  $I_aB \cdot I_aB'' = I_aC \cdot I_aC'' = I_aA' \cdot I_aA = 2Rr_a$

On en déduit :  $I_aA' \cdot I_aB'' \cdot I_aC'' = (2Rr_a)^3 / (I_aA \cdot I_aB \cdot I_aC) = 2R^2r_a$ .

C.q.f.d.