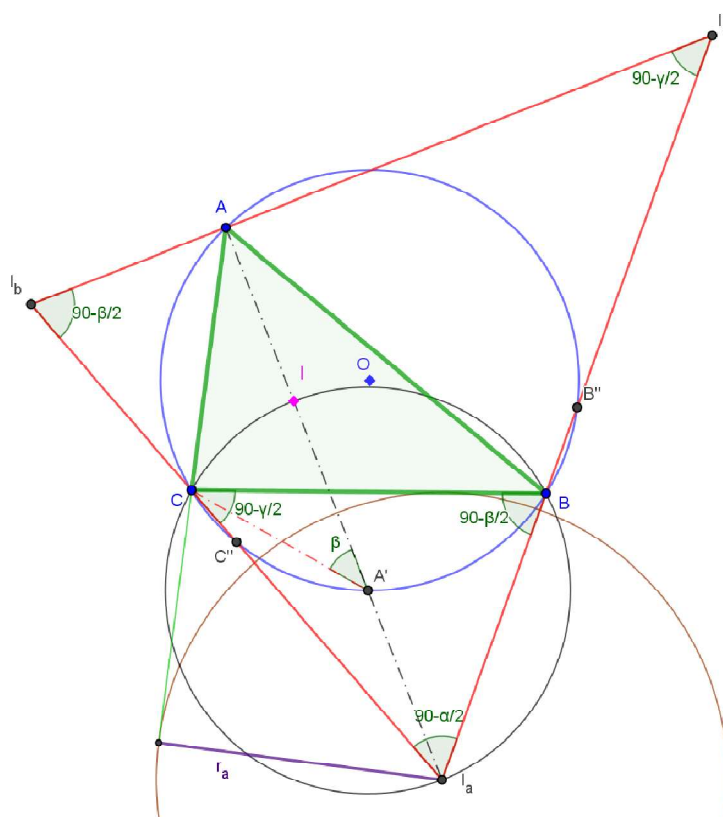


Problema 888.

Sean los puntos A', B', C' de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC donde se intersectan la bisectriz interior trazada desde A y las bisectrices exteriores trazadas desde los vértices, B y C , respectivamente. Sean I_a el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos B y C , y r_a el radio de la circunferencia exinscrita del ángulo A . Se verifica entonces la relación $A'I_a \cdot B'I_a \cdot C'I_a = 2R^2 \cdot r_a$.

Aranda, F. D. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Llamando s al semiperímetro del triángulo, $s_a = s - a$ y R al radio de la circunferencia circunscrita, sabemos que se verifican

$$s_a r_a = sr = \text{Área}(ABC) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{ss_a s_b s_c} \quad (E)$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s_a} = \frac{r_a}{s}$$

A partir de $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ss_a}{bc}}$ y con la ayuda de (E) obtenemos

$$\frac{s}{4R} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \quad (2)$$

El triángulo formado por los excentros, de ángulos $90 - \frac{\alpha}{2}, 90 - \frac{\beta}{2}, 90 - \frac{\gamma}{2}$, tiene como circunferencia de los nueve puntos a la circunscrita a ABC , por tanto, su circunferencia circunscrita tiene radio $2R$ y sus lados miden respectivamente

$$a' = 2(2R) \cdot \sin \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, b' = 4R \cdot \cos \frac{\beta}{2}, c' = 4R \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Por otra parte los puntos B'', C'' son puntos medios de dos lados de este triángulo.

Por tanto $\boxed{B''I_a = \frac{b'}{2} = 2R \cdot \cos \frac{\beta}{2}}$ y $\boxed{C''I_a = \frac{c'}{2} = 2R \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}$.

Como hemos visto en el problema 887, la circunferencia de centro A' que pasa por B y C , también pasa por I . En el triángulo rectángulo $I_a A I_b$ el ángulo en I_a , complementario del ángulo en I_b , es $\frac{\beta}{2}$. Como $\angle AA'C = \beta$ resulta que $\angle A'CI_a = \angle CI_a A' = \frac{\beta}{2}$: el triángulo $A'CI_a$ es isósceles y la circunferencia de centro A' también pasa por I_a .

De todo esto concluimos que $\boxed{A'C = A'I_a = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Ya podemos calcular la expresión del problema:

$$\begin{aligned} A'I_a \cdot B''I_a \cdot C''I_a &= 8R^3 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 8R^3 \cdot \frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = 2R^2 s \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = 2R^2 s \cdot \frac{r_a}{s} \\ &= 2R^2 \cdot r_a \end{aligned}$$

■