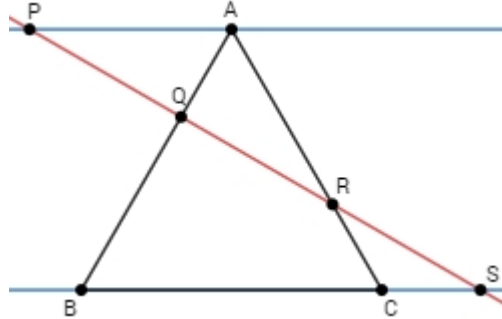


TRIÁNGULOS CABRI

Ejercicio 889. (Certamen Al-Bayat 2006) Sea ABC un triángulo equilátero cuyos lados tiene longitud 3. Trazamos la recta s que contiene a BC y la recta p paralela a s pasando por A . Si $PQ = QR = RS$, siendo $PQRS$ una transversal de ABC , con P en p y S en s , ¿cuál es la longitud de CS ?



Solución:

Sabemos que:

$$a = b = c = 3 \Rightarrow \begin{cases} S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{9}{2} \\ S_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = \frac{9}{2} \\ S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que:

$$\begin{cases} s \equiv 0 = x \\ p \equiv 0 = y + z \end{cases}$$

por lo que, si:

$$\begin{cases} S = (0 : s : 1-s) \ (s < 0) \\ P = (1 : p : -p) \ (p > 0) \end{cases} \Rightarrow PS \equiv 0 = px + (s-1)y + sz$$

entonces:

$$\begin{cases} Q = PS \cap AB = (1-s : p : 0) = \left(\frac{1-s}{1-s+p} : \frac{p}{1-s+p} : 0 \right) \\ R = PS \cap AC = (-s : 0 : p) = \left(\frac{s}{s-p} : 0 : \frac{p}{p-s} \right) \end{cases}$$

luego:

$$\begin{cases} PQ^2 = S_A \left(1 - \frac{1-s}{1-s+p} \right)^2 + S_B \left(p - \frac{p}{1-s+p} \right)^2 + S_C (-p-0)^2 = \frac{9p^2[(p-s)^2 + p-s+1]}{(p-s+1)^2} \\ QR^2 = S_A \left(\frac{s}{s-p} - \frac{1-s}{1-s+p} \right)^2 + S_B \left(0 - \frac{p}{1-s+p} \right)^2 + S_C \left(\frac{p}{p-s} - 0 \right)^2 = \frac{9p^2[(p-s)^2 + p-s+1]}{(p-s)^2(p-s+1)^2} \\ RS^2 = S_A \left(\frac{s}{s-p} - 0 \right)^2 + S_B (0-t)^2 + S_C \left(\frac{p}{p-s} - 1+t \right)^2 = \frac{9s^2[(p-s)^2 + p-s+1]}{(p-s)^2(p-s+1)^2} \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

y, por tanto:

$$\begin{cases} 1 = (p-s)^2 \\ 1 = \frac{s^2(p-s+1)^2}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{3} \\ p = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \left(0 : -\frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) \\ P = \left(1 : \frac{2}{3} : -\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

Finalmente, como $C = (0 : 0 : 1)$, entonces:

$$CS^2 = S_A(0-0)^2 + S_B\left(0+\frac{1}{3}\right)^2 + S_C\left(1-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{9}{2}\left(0+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) = 1 \Rightarrow CS = 1$$