Pr. Cabri 890

Enunciado

Propuesto por Philippe Fondanaiche

Sea un triángulo ABC.

La circunferencia inscrita de centro I es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos A1, B1 y C1.

La circunferencia exinscrita del ángulo A es tangente al lado BC en el punto A2.

Los puntos A', B', C', son los puntos medios de los lados BC, CA y AB.

AH es la altura del vértice A.

Se definen los siguientes nueve puntos M, N, P, Q, R , S , T, U, V:

La recta A2I corta a AH en el punto M.

La recta A'I corta a la recta AA1 En el punto N.

La recta A1I corta a la mediana AA' en el punto P.

La perpendicular por I a la recta AA' corta en el punto Q a la paralela a BC por A.

La bisectriz del ángulo C del triángulo ABC corta a la recta A'C' en el punto R.

La bisectriz del ángulo B corta la circunferencia de diámetro BC en un segundo punto S.

La recta A1B1 corta a la recta A'C' en el punto T.

El punto U es el punto medio de la mediana AA'.

El punto V es la proyección del vértice A sobre la bisectriz del ángulo B.

Demostrar que:

Los puntos M, N, U y V están alineados.

Los puntos P, Q, R y S están alineados.

Los puntos B, I, R y T son concíclicos.

Los puntos B, C, R y S son concíclicos.

Los puntos A, B, V, T son concíclicos.

Solución
de César Beade Franco

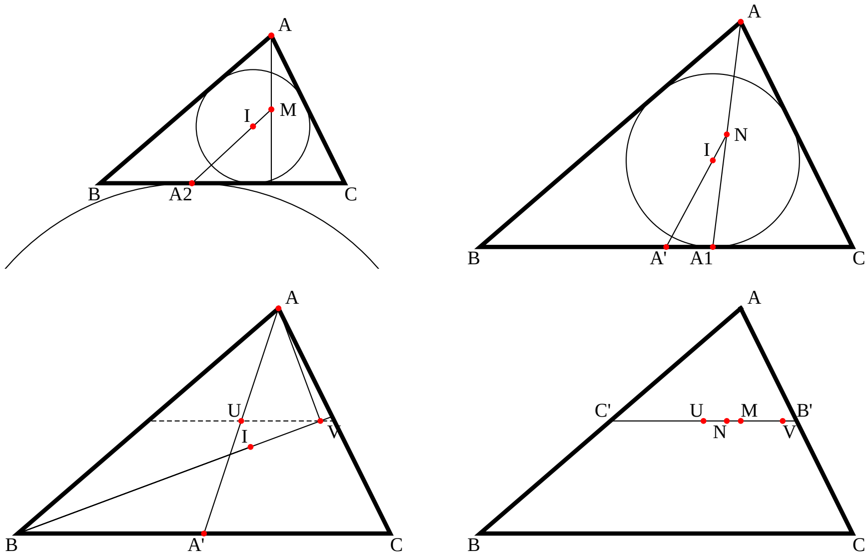
M, N, U y V

Usamos un EH-triángulo de vértices A(eh,$\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}$), B(-1,0) y C(0,1) (1).

En estas condiciones I=(h, $\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$) y A2=(-h,0). La intersección de la recta A2I con la altura desde A nos da M=($e\,h$, $\frac{1}{2}\sqrt{-(-1+e^2)(-1+h^2)}$), el punto medio de esta altura.

Del anterior valor de I deducimos que A1=(h,0). El corte de AI con A1A es N=($\frac{1}{2}(1+e)\,h$, $\frac{1}{2}\sqrt{-(-1+e^2)(-1+h^2)}$) punto medio también de A1A.

Además Tanto U como V están sobre la paralela media respecto al vértice A. Por tanto M, N, U y V están sobre la línea B'C'.



- **P, Q, R y S.**

Calculemos los puntos P, Q, R y S.

P=A1I $\cap$ AA'=$\left(h, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{e}\right)$ (2).

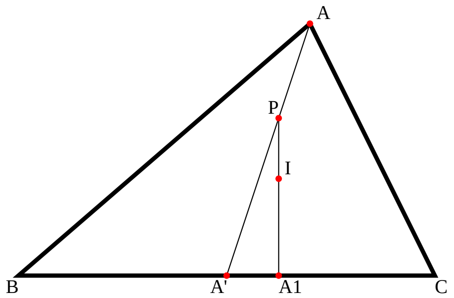
La perpendicular por I a la recta AA' (de ecuación $1-h^2+e(-1+h\,x)+\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}\;y=0$) corta en el punto Q a la paralela a BC (de ecuación $y=\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}$) por A. Así pues

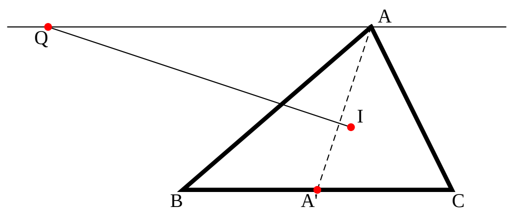
Q=$\left(\frac{1+e(-1+h^2)}{h}, \sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}\right)$.

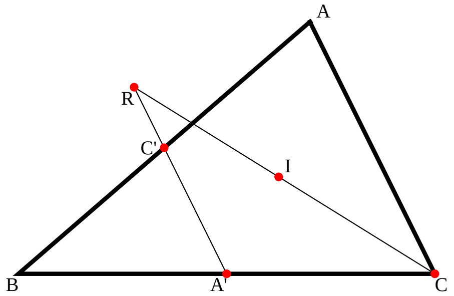
R=CI $\cap$ A'C'=$\left(\frac{-1+e\,h}{e-h}, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{e-h}\right)$.

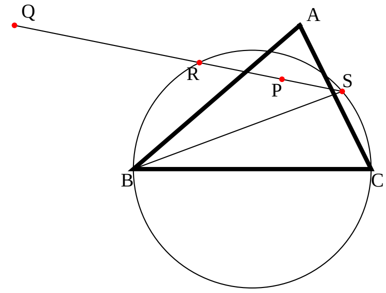
La bisectriz del ángulo B corta la circunferencia de diámetro BC en un segundo punto S. La ciunferencia tiene ecuación $x^2+y^2=1$, y la bisectriz $-\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}\,(1+x)+(1+e)(1+h)\,y=0$. Se cortan en S=$\left(\frac{1+e\,h}{e+h}, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{e+h}\right)$.

Comprobando que Det(Q-P,R-Q)=Det(R-Q,S-R)=0 concluímos que están alineados.









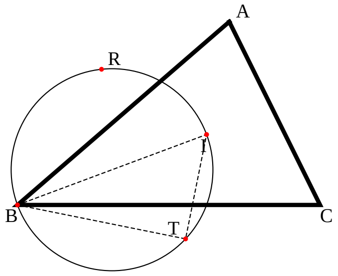
- **B, C, R y S**

En el último dibujo se observa la conciclidad de esos puntos. Como R=$\left(\frac{-1+e\,h}{e-h}, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{e-h}\right)$ y RB.RC=0, se comprueba (3) que R está sobre la circunferencia de diámetro BC, lo mismo que S por construcción.

B, I, R y T

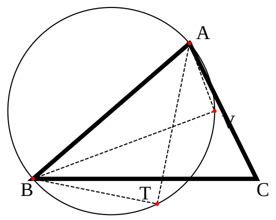
La circunferencia BIR tiene como ecuación implícita $(1+e)\,x+(1+e)\,x^2-(1+e)\,h\,(1+x)+y\left(-\sqrt{\left(-1+e^2\right)\left(1-h^2\right)}+y+e\,y\right)=0.$

El punto T=A1B1 ⋂ A’C'=$\left(h,\ \frac{h-e\,h^2}{e-h},\ -\frac{h\sqrt{(-1+e^2)\,(1-h^2)}}{e-h}\right)$ satisface la anterior ecuación. También podríamos ver que TI.TB=RI.RB=0, por lo que T y R están sobre la circunferencia de diámetro AB.



A, B, T y V

El punto V es la proyección del vértice A sobre la bisectriz del ángulo B, así que ha de estar sobre la circunferencia de diámetro AB. Además se comprueba que TA.T-B=0, lo que indica que también T está sobre esa circunferencia.



Notas

(1) Para una explicación de esta notación se puede ver los problemas 689 y 884.

(2) Como curiosidad el punto de corte de las rectas PQ y RS, con P(a,b), Q(c,d), R(e,f), S(g,h) se puede obtener (en el *Mathematica*) con el siguiente comando Corte4P[{{{a, b}, {c, d}}, {{e, f}, {g, h}}}]:=

$$\left\{a+\frac{(-a+c)\,((-b+f)\,(-e+g)+(a-e)\,(-f+h))}{(-b+d)\,(-e+g)-(-a+c)\,(-f+h)},\ b+\frac{(-b+d)\,((-b+f)\,(-e+g)+(a-e)\,(-f+h))}{(-b+d)\,(-e+g)-(-a+c)\,(-f+h)}\right\}$$

(3) Este y otros cálculos análogos están hechos con el *Mathematica*.

En este caso tendríamos $\left(\left\{\frac{-1+e\,h}{e-h},\ \frac{\sqrt{(-1+e^2)\,(1-h^2)}}{e-h}\right\}-\{-1,\ 0\}\right).$.

$$\left(\left\{\frac{-1+e\,h}{e-h},\ \frac{\sqrt{(-1+e^2)\,(1-h^2)}}{e-h}\right\}-\{1,\ 0\}\right)\ //\ \texttt{Simplify}$$

Y respondería con 0 de resultado.