TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 890.</u> (Propuesto por Philippe Fondanaiche) Sea ABC un triángulo. La circunferencia inscrita de centro I es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. La circunferencia exinscrita correspondiente al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_2. Los puntos A', B' y C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente. La recta AH es la altura correspondiente al vértice A. Se definen los nueve puntos siguientes:

❶ La recta A_2I corta a AH en el punto M.

❷ La recta $A'I$ corta a la recta AA_1 en el punto N.

❸ La recta A_1I corta a la mediana AA' en el punto P.

❹ La recta perpendicular por I a la mediana AA' corta en el punto Q a la recta paralela a BC por A.

❺ La bisectriz interior correspondiente al vértice C corta a la recta $A'C'$ en el punto R.

❻ La bisectriz interior correspondiente al vértice B corta a la circunferencia de diámetro BC en un segundo punto S.

❼ La recta A_1B_1 corta a la recta $A'C'$ en el punto T.

❽ El punto U es el punto medio de la mediana AA'.

❾ El punto V es la proyección del vértice A sobre la bisectriz interior correspondiente al vértice B.

Demostrar que:

① Los puntos M, N, U y V están alineados.

② Los puntos P, Q, R y S están alineados.

③ Los puntos B, I, R y T son concíclicos.

④ Los puntos B, C, R y S son concíclicos.

⑤ Los puntos A, B, V y T son concíclicos.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC, resulta que:

$$\begin{cases} A_1 = (0 : a+b-c : a-b+c) \\ B_1 = (a+b-c : 0 : -a+b+c) \\ C_1 = (a-b+c : -a+b+c : 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} A' = (0 : 1 : 1) \\ B' = (1 : 0 : 1) \\ C' = (1 : 1 : 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} I = (a : b : c) \\ A_2 = (0 : a-b+c : a+b-c) \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a calcular las coordenadas de los nueve puntos considerados:

❶ Como:

$$\begin{cases} A_2I \equiv 0 = (a+b+c)(b-c)x - a(a+b-c)y + a(a-b+c)z \\ AH \equiv 0 = (a^2-b^2+c^2)y - (a^2+b^2-c^2)z \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces:

$$M=(2a^2:a^2+b^2-c^2:a^2-b^2+c^2)$$

❷ Como:

$$\begin{cases} A'I\equiv 0=(c-b)x+ay-az \\ AA_1\equiv 0=(a-b+c)y-(a+b-c)z \end{cases}$$

entonces:

$$N=(2a:a+b-c:a-b+c)$$

❸ Como:

$$\begin{cases} A_1I\equiv 0=(-a+b+c)(b-c)x+a(a-b+c)y-a(a+b-c)z \\ AA'\equiv 0=y-z \end{cases}$$

entonces:

$$P=(2a:-a+b+c:-a+b+c)$$

❹ Como:

$$\begin{cases} (AA')_\infty^\perp=(2(b^2-c^2):a^2-3b^2-c^2:-a^3+b^2+3c^2) \\ BC_\infty=(0:1:-1) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} (AA')_\infty^\perp I\equiv 0=(-a+b+c)(b+c)x+(a-b+c)(a-2c)y+(a+b-c)(a-2b)z \\ BC_\infty A\equiv 0=y+z \end{cases}$$

entonces:

$$Q=(2(b-c):a-b-c:-a+b+c)$$

❺ Como la ecuación de la bisectriz interior correspondiente al vértice C es:

$$bx-ay=0$$

y:

$$A'C'\equiv 0=x-y+z$$

entonces:

$$R=(a:b:b-a)$$

❻ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos B y C es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - ux(x + y + z) = 0 \ (u \in \mathbb{R})$$

imponiendo que esté centrada en el punto A', obtenemos que:

$$u = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es BC es:

$$2(a^2yz + b^2xz + c^2xy) + (a^2 - b^2 - c^2)x(x + y + z) = 0$$

y, como la bisectriz interior correspondiente al vértice B es:

$$cx - az = 0$$

entonces:

$$S = (a : c - a : c)$$

❼ Como:

$$\begin{cases} A_1B_1 \equiv 0 = (-a + b + c)x + (a - b + c)y - (a + b - c)z \\ A'C' \equiv 0 = x - y + z \end{cases}$$

entonces:

$$T = ((b - c) : b : c)$$

❽ $U = (2 : 0 : 0) + (0 : 1 : 1) = (2 : 1 : 1)$

❾ Como las ecuaciones de las bisectrices interior y exterior correspondientes al vértice B son:

$$\begin{cases} cx + az = 0 \\ cx - az = 0 \end{cases}$$

entonces, el punto del infinito de las rectas perpendiculares a la bisectriz interior (y, por tanto, paralelas a la bisectriz exterior) es $(-a : a - c : c)$, por lo que, la ecuación de la recta perpendicular a la bisectriz interior pasando por A es:

$$cy + (c - a)z = 0$$

y, por tanto:

$$V = (a : a - c : c)$$

TRIÁNGULOS CABRI

Una vez calculadas las coordenadas baricéntricas de estos nueve puntos, vamos a probar lo que nos pide el enunciado del problema:

① Como:

$$rg\begin{pmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c^2 & a^2-b^2+c^2 \\ 2a & a+b-c & a-b+c \\ 2 & 1 & 1 \\ a & a-c & c \end{pmatrix}=2$$

entonces, los puntos M, N, U y V están alineados.

② Como:

$$rg\begin{pmatrix} 2a & -a+b+c & -a+b+c \\ 2(b-c) & a-b-c & -a+b+c \\ a & b & b-a \\ a & c-a & c \end{pmatrix}=2$$

entonces, los puntos P, Q, R y S están alineados.

③ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por el punto B es de la forma:

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy-(ux+wz)(x+y+z)=0\ (u,w\in\mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos I y R, obtenemos que:

$$\begin{cases} u=\dfrac{c(-a+b+c)}{2} \\ v=\dfrac{a(a+b-c)}{2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$2(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-[c(-a+b+c)x+a(a+b-c)z](x+y+z)=0$$

Además, como las coordenadas del punto T verifican esta ecuación, entonces, los puntos B, I, R y T son concíclicos.

④ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos B y C es de la forma:

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy-ux(x+y+z)=0\ (u\in\mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto R, obtenemos que:

$$u=-\frac{a^2-b^2-c^2}{2}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$2(a^2yz+b^2xz+c^2xy)+(a^2-b^2-c^2)x(x+y+z)=0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Además, como las coordenadas del punto S verifican esta ecuación, entonces, los puntos B, C, R y S son concíclicos.

⑤ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y B es de la forma:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - wz(x + y + z) = 0 \ (w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto V, obtenemos que:

$$w = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$2(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - (a^2 + b^2 - c^2)x(x + y + z) = 0$$

Además , como las coordenadas del punto S verifican esta ecuación, entonces, los puntos A, B, V y T son concíclicos.