

Problema n°890

Sea un triángulo ABC.

La circunferencia inscrita de centro I es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos A_1 , B_1 y C_1 .

La circunferencia exinscrita del ángulo A es tangente al lado BC en el punto A_2 .

Los puntos A' , B' , C' , son los puntos medios de los lados BC, CA y AB.

AH es la altura del vértice A.

Se definen los siguientes nueve puntos M, N, P, Q, R, S, T, U, V:

La recta A_2I corta a AH en el punto M.

La recta $A'I$ corta a la recta AA_1 en el punto N.

La recta A_1I corta a la mediana AA' en el punto P.

La perpendicular por I a la recta AA' corta en el punto Q a la paralela a BC por A.

La bisectriz del ángulo C del triángulo ABC corta a la recta $A'C'$ en el punto R.

La bisectriz del ángulo B corta la circunferencia de diámetro BC en un segundo punto S.

La recta A_1B_1 corta a la recta $A'C'$ en el punto T.

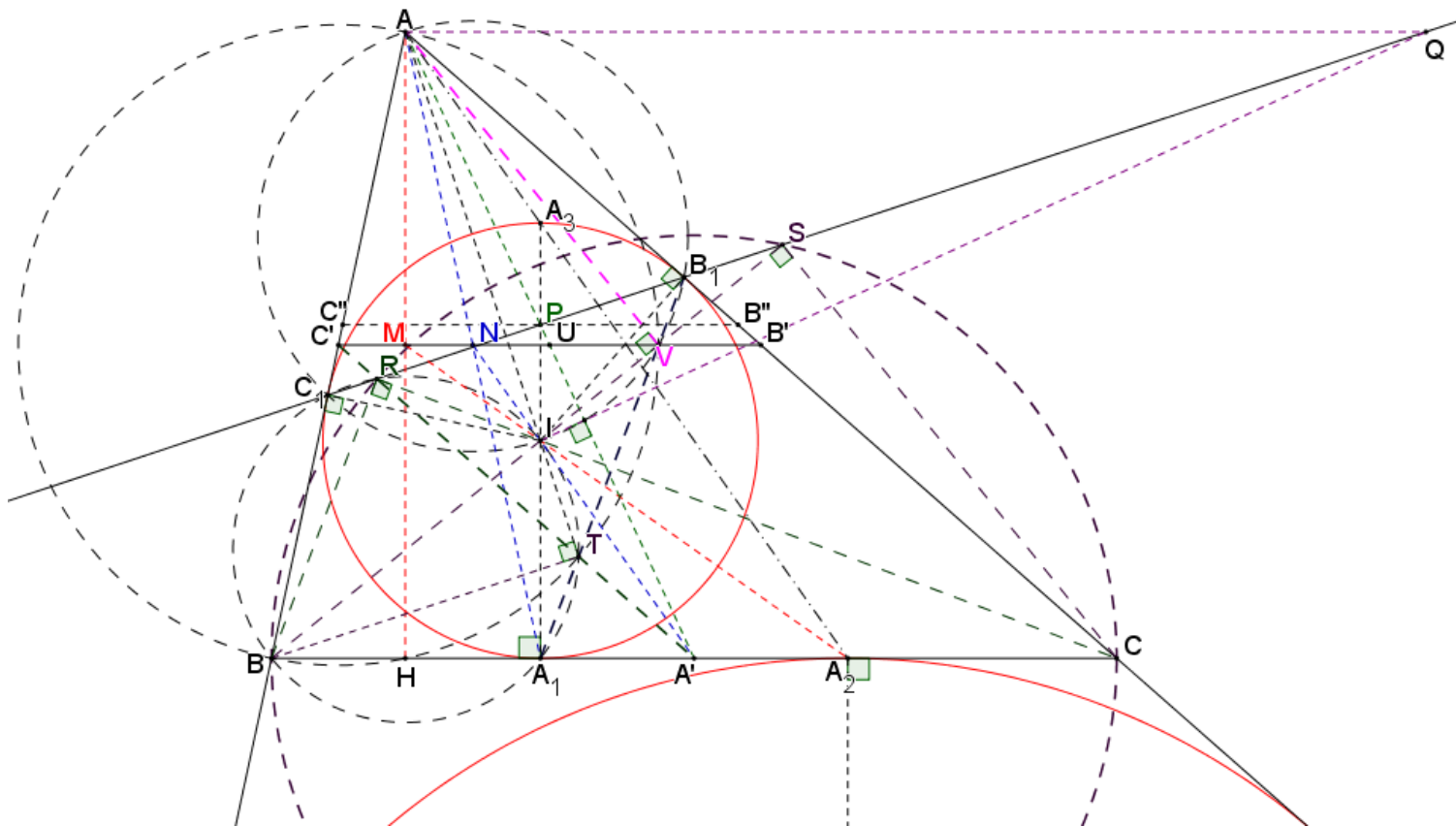
El punto U es el punto medio de la mediana AA' .

El punto V es la proyección del vértice A sobre la bisectriz del ángulo B.

Demostrar que:

1. Los puntos M, N, U y V están alineados.
2. Los puntos P, Q, R y S están alineados.
3. Los puntos B, I, R y T son concíclicos.
4. Los puntos B, C, R y S son concíclicos.
5. Los puntos A, B, V, T son concíclicos.

Solution



1) Les points M, N, U et V sont sur la droite $[B'C']$

Soit A_3 le point diamétralement opposé au point A_1 sur le cercle inscrit de centre I.

Lemme n°1 : Les points A, A_3 et A_2 sont alignés.

Soit l'homothétie de centre A qui transforme le cercle inscrit en le cercle exinscrit du secteur de l'angle en A. Le diamètre A_1A_3 devient le diamètre du cercle exinscrit perpendiculaire à BC au point A_2 , point de tangence de ce cercle avec le côté BC. Il en résulte que A_2 est le transformé de A_3 . C.q.f.d.

AH étant parallèle à A_1A_3 et I étant le milieu de A_1A_3 , d'après le théorème de Thalès, le point M à l'intersection de AH et de la droite $[A_2I]$ est au milieu de AH. M est donc sur la droite $[B'C']$ qui passe par les milieux B' et C' des côtés AB et AC

Lemme n°2 : $BA_1 = CA_2$.

Si on désigne par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA et AB, on a la relation $BA_1 = CA_2 = (a - b + c)/2$

Il en découle que A' est le milieu de A_1A_2 . La droite $[A'I]$ qui joint les milieux A' et I des côtés A_1A_2 et A_1A_3 dans le triangle $A_1A_2A_3$ est donc parallèle à la droite $[A_2A_3]$ et elle coupe la droite AA_1 en son milieu N. Ce point est donc sur la droite $[B'C']$.

Lemme n°3: La droite $B'C'$ joignant les milieux des côtés AC et AB, la droite $[A_1B_1]$ joignant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés AC et BC et la bissectrice $[BI]$ de l'angle en B se rencontrent en un même point V.

Soit V' le point d'intersection de la bissectrice $[BI]$ avec la droite $[B'C']$. Comme les angles $\angle AIB$ et $\angle V'B_1C$ sont supplémentaires avec $\angle AIB = 180^\circ - \angle BAC/2 - \angle ABC/2 = 90^\circ + \angle ACB/2$ et $\angle V'B_1C = \angle A_1B_1C = 90^\circ - \angle ACB/2$, les quatre points A, I, B_1 et V' sont sur un même cercle de diamètre AI. La droite AV' est donc perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en I et V' est donc confondu avec le point V.

Par ailleurs le triangle ABV, rectangle en V, admet AB pour hypoténuse. Le triangle $C'BV$ est isocèle de sommet C' et l'on a $\angle C'BV = \angle C'VB$. D'où $\angle AC'V = \angle C'BV + \angle C'VB = 2\angle C'BC = \angle ABC$. $C'V$ est parallèle à BC.

La parallèle à la droite $[BC]$ passant par C' se confond avec la droite $[B'C']$. V est donc sur la droite $[B'C']$

Par construction U milieu de AA' est sur la droite $[B'C']$

Conclusion: les quatre points M, N, U et V sont alignés sur la droite $[B'C']$.

2) Les points P, Q, R, S sont sur la droite $[B_1C_1]$

Lemme n°4 : Dans un triangle ABC dans lequel le cercle inscrit de centre I touche les côtés BC, CA et AB aux points A_1, B_1 et C_1 , les droites B_1C_1 et A_1I sont concourantes en un point P avec la médiane AA' du triangle ABC.

On désigne par P' le point d'intersection des droites $[A_1I]$ et $[B_1C_1]$. On mène la droite parallèle au côté BC passant par P' qui coupe AB et AC aux points C'' et B'' . Les projections B_1, C_1 et P' de I sur les côtés AB'' , AC'' et $B''C''$ du triangle $AB''C''$ étant par construction alignées, d'après le théorème de Simson le point I appartient au cercle circonscrit au triangle $AB''C''$. Comme la droite AI est la bissectrice de l'angle en A de ce triangle, on a $IB'' = IC''$. D'où $P'B'' = P'C''$. Le point P' est donc sur la médiane AA' et il est confondu avec le point P.

Conclusion: P est sur la droite $[B_1C_1]$

Lemme n°5 : La perpendiculaire menée de I à la médiane AA' coupe la droite B_1C_1 en un point Q' tel que AQ' est parallèle à BC.

Le point P, situé à l'intersection des droites $[B_1C_1]$ et $[AA']$ qui sont respectivement perpendiculaires aux droites $[AP]$ et $[IQ']$, est l'orthocentre du triangle $AQ'I$. La droite $[IP]$ est donc perpendiculaire à la droite $[AQ']$.

Or d'après le lemme n°4, les droites $[B_1C_1]$, $[A_1I]$ et la médiane $[AA']$ sont concourantes au même point P tel que les points A_1, I et P sont alignés. Les droites $[AQ']$ et $[BC]$ étant perpendiculaires à la même droite $[A_1I]$ sont deux droites parallèles. Le point Q' est donc confondu avec le point Q.

Conclusion: Q est sur la droite $[B_1C_1]$

Lemme n°6 : La droite $[B_1C_1]$, la bissectrice $[CI]$ de l'angle en C et la droite $[A'C']$ joignant les milieux A' et C' des côtés BA et BC sont concourantes en un point R.

Ce lemme est la conséquence directe du lemme n°4 avec les points B, R, B_1 et C_1 qui sont les homologues des points A, V, A_1 et B_1 avec la droite $[BR]$ perpendiculaire à la bissectrice $[CI]$ de l'angle en C.

Conclusion: R est sur la droite $[B_1C_1]$

Lemme n°7 : La bissectrice de l'angle en B coupe le cercle de diamètre BC en un deuxième point S qui est situé sur la droite joignant les points de contact B_1 et C_1 du cercle inscrit avec les côtés AB et AC.

On a $\angle BSC = \angle BRC = 90^\circ$. Les cinq points B, A_1, I, R et C_1 sont sur le même cercle de diamètre BI de même que les cinq points C, A_1, I, B_1 et S sur le cercle de diamètre BC.

Il en résulte que $\angle CRC_1 = 180^\circ - \angle ABI = 180^\circ - \angle ABS$ et $\angle CRB_1 = \angle CRS = \angle CBS$.

Comme $\angle ABS = \angle CBS$, on a $\angle CRC_1 + \angle CRB_1 = 180^\circ$.

Conclusion: S est sur la droite $[B_1C_1]$

3) les quatre points B,I,R et T sont sur un même cercle,

Lemme n°8 : La droite A_1B_1 , la bissectrice $[AI]$ de l'angle en A et la droite $[A'C']$ joignant les milieux A' et C' des côtés BA et BC sont concourantes en un point T.

Ce lemme est la conséquence directe du lemme n°4 avec les points B,T, A_1 et B_1 qui sont les homologues des points A,V, A_1 et B_1 avec la droite $[BT]$ perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en A

Il en résulte que les six points B, A_1 ,T,I,R et C sont sur le même cercle de diamètre BI.

4) les quatre points B,C,R et S sont sur un même cercle

Cette propriété découle du lemme n°7

5) les quatre points A,B,V et T sont sur un même cercle.

Cette propriété découle du lemme n°8 avec la droite $[BT]$ perpendiculaire à la bissectrice $[AI]$ et par construction la droite $[AV]$ perpendiculaire à la bissectrice $[BI]$