

Problema 890.

Sea un triángulo ABC .

La circunferencia inscrita de centro I es tangente a los lados BC , CA y AB en los puntos A_1 , B_1 y C_1 .

La circunferencia exinscrita del ángulo A es tangente al lado BC en el punto A_2 .

Los puntos A' , B' , C' , son los puntos medios de los lados BC , CA y AB .

AH es la altura del vértice A .

Se definen los siguientes nueve puntos M , N , P , Q , R , S , T , U , V :

La recta A_2I corta a AH en el punto M .

La recta $A'I$ corta a la recta AA_1 en el punto N .

La recta A_1I corta a la mediana AA' en el punto P .

La perpendicular por I a la recta AA' corta en el punto Q a la paralela a BC por A .

La bisectriz del ángulo C del triángulo ABC corta a la recta $A'C'$ en el punto R .

La bisectriz del ángulo B corta la circunferencia de diámetro BC en un segundo punto S .

La recta A_1B_1 corta a la recta $A'C'$ en el punto T .

El punto U es el punto medio de la mediana AA' .

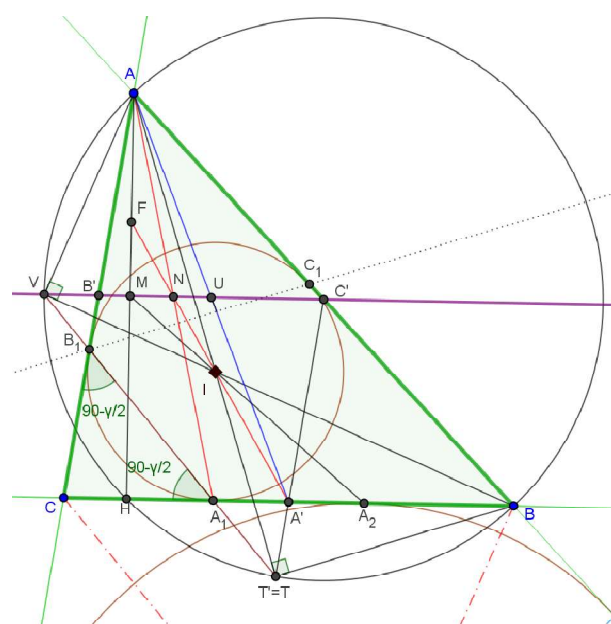
El punto V es la proyección del vértice A sobre la bisectriz del ángulo B .

Demostrar que:

1. Los puntos M , N , U y V están alineados.
2. Los puntos P , Q , R y S están alineados.
3. Los puntos B , I , R y T son concíclicos.
4. Los puntos B , C , R y S son concíclicos.
5. Los puntos A , B , V , T son concíclicos.

Fondanaiche, P. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1 y 5.- M, N, U y V están sobre la paralela media $A'B'$. A, B, V y T son concíclicos.

a) De la semejanza de los triángulos MHA_2 y IA_1A_2 se tiene $\frac{MH}{r} = \frac{HA_2}{A_1A_2}$; $A_1A_2 = c - b$ y $HA_2 = (s - b) - b \cos \gamma$.

$$\frac{MH}{r} = \frac{(s - b) - b \cos \gamma}{c - b} = \frac{s - b(1 + \cos \gamma)}{c - b} = \frac{s - b \cdot \frac{2s(s - c)}{ba}}{c - b} = \frac{s}{a}$$

Con esto, tomando $rs = [ABC] = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, tenemos ahora $MH = \frac{rs}{a} = \frac{AH}{2}$, que demuestra que el punto M está en la paralela media $B'C'$.

b) $A'I$ corta a la recta AA_1 en el punto N . Y queremos ver que N también está en esa recta. Esto fue demostrado en el problema 820 de la segunda quincena de abril de 2017. Puede demostrarse también como sigue: si prolongamos $A'I$ hasta cortar a la altura AH en F tenemos dos triángulos

semejantes AFN y A_1IN . Bastará demostrar ahora que $AF = r$.

De la semejanza de los triángulos $\Delta FHA'$ y $\Delta IA_1A'$ tenemos

$$\frac{FH}{r} = \frac{HA'}{A_1A'} = \frac{\frac{a}{2} - b \cdot \cos \gamma}{\frac{c-b}{2}} = \frac{a(a - 2b \cdot \cos \gamma)}{a(c-b)} = \frac{c^2 - b^2}{a(c-b)} = \frac{c+b}{a}$$

$$AF = AH - FH = \frac{2rs}{a} - \frac{r(c+b)}{a} = r.$$

c) y d) Es evidente que U está sobre $B'C'$.

Por construcción V está en la circunferencia de centro C' y radio $\frac{c}{2}$. A partir de ahí el triángulo $VC'B$ es isósceles y el ángulo en C' es $180 - \beta$ con lo cual se concluye que V también está en esa recta. Además en el problema 828 de la primera quincena de mayo de 2017 demostramos que V está alineado con B_1A_1 . Pero se puede demostrar ahora también.

Sea T' la proyección ortogonal de B sobre la bisectriz de A , según lo anterior, T' está sobre la recta $A'C'$. El triángulo $\Delta VC'T'$ es isósceles y los ángulos iguales son de amplitud $90 - \frac{\gamma}{2}$ y con ello también es isósceles el $\Delta VB'B_1$, ya que $\angle VB'B_1 = \gamma$ y por tanto el punto V está alineado con B_1 y A_1 . E igualmente T' también está alineado con B_1 y A_1 .

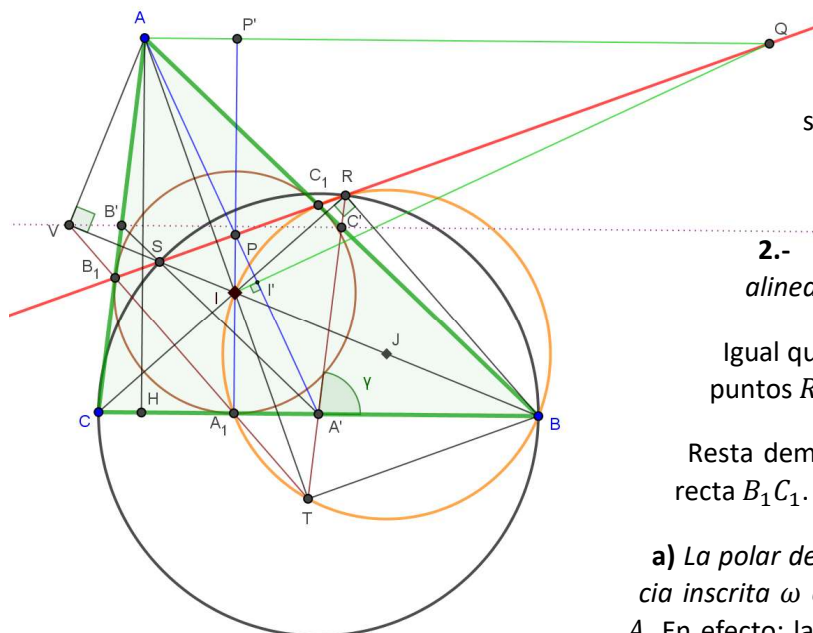
O sea, $T' = T$ y con esto tenemos el punto 5.

3.- Es evidente, según hemos visto, que CR y BR son perpendiculares, por tanto el punto medio J de BI es el centro de la circunferencia que pasa por B, I, R . La proyección de B sobre la bisectriz de A es T , por ello, también T está en esta circunferencia.

4.- $\Delta CA'R$ es isósceles, pues el ángulo en A' es el suplemento de γ , y en C es $\frac{\gamma}{2}$. Por tanto R está en la circ. de centro A' y radio $\frac{a}{2}$.

S está, por construcción, sobre esa circunferencia, por tanto, $A'S = A'B$, y el ángulo $\angle SA'B$ del

triángulo isósceles $\Delta SA'B$ es igual al suplementario de β . Entonces $A'S$ es paralelo a AB y por tanto S está sobre el segmento $B'A'$.



2.- Los puntos P, Q, R y S están alineados.

Igual que V y T están sobre B_1A_1 , los puntos R y S están sobre B_1C_1 .

Resta demostrar que P y Q están en la recta B_1C_1 .

a) La polar de P respecto de la circunferencia inscrita ω es la recta paralela a BC por A . En efecto: la polar de P es una recta per-

pendicular al diámetro PI que pasa por el inverso, P' de P , respecto de ω .

Tomamos P' en la intersección del diámetro PI con la paralela a BC por A . P' es el inverso de P si se verifica que $PI \cdot P'I = r^2$. De la semejanza de los triángulos rectángulos AHA' y PA_1A' se tiene

$$PI = PA_1 - r = AH \cdot \frac{A_1A'}{HA'} - r; \frac{A_1A'}{HA} = \frac{a}{c+b}, \text{ calculado antes y } PA_1 = AH \cdot \frac{A_1A'}{HA'} = \frac{2rs}{a} \cdot \frac{a}{c+b} = \frac{2rs}{c+b}.$$

$$PI = PA_1 - r = \frac{2rs}{c+b} - r = \frac{ar}{c+b}. \quad P'I = \frac{2rs}{a} - r = \frac{(c+b)r}{a}.$$

$$\text{Por tanto } PI \cdot P'I = \frac{ar}{c+b} \cdot \frac{(c+b)r}{a} = r^2.$$

La polar de P pasa por A , luego la polar de A pasa por P : son conjugados respecto de ω . Por ello la polar de A , recta B_1C_1 , pasa por P como pretendíamos demostrar.

b) Q es el polo de la mediana AA' .

El polo de la mediana AA' se encuentra en el diámetro de ω perpendicular a la misma y también sobre la polar de uno de sus puntos, por ejemplo P : la paralela por A a BC . Así es como hemos definido Q . Pero también está en la polar de A recta B_1C_1 .

■