

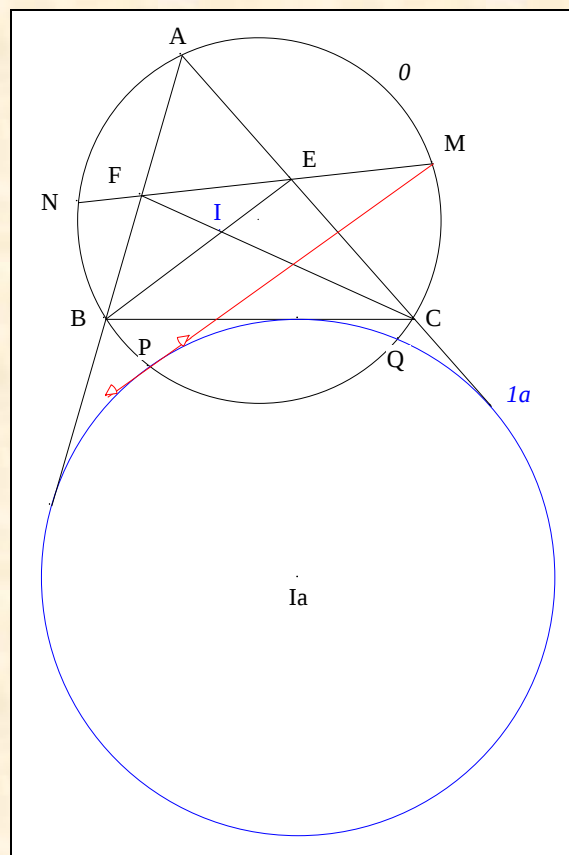
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE



UNE TANGENTE REMARQUABLE



Jean-Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente l'étude d'un problème ardu où l'apprentissage et l'approfondissement se relayent subtilement pour le résoudre dans un premier temps et le solutionner dans un second temps.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract.

The author presents the study of a difficult problem where learning and deepening take turns subtly to solve it.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Sommaire

1. Centre externe d'homothétie des cercles circonscrit et A-exinscrit	3
2. Centre externe d'homothétie des cercles circonscrit et inscrit	5
3. Un quadrilatère harmonique	8
4. Deux perpendiculaires	11
5. La polaire de X	13
6. Un cercle inattendu pour un résultat inattendu	21
7. Une tangente par une approche synthétique	28
8. Une tangente par une approche métrique	30
9. Cinq points cocycliques	34
10. Quatre points cocycliques	43
11. Quatre points cocycliques	46
12. Cinq points cocycliques	51
13. Quatre points cocycliques	56
14. Intersection sur le cercle circonscrit	58

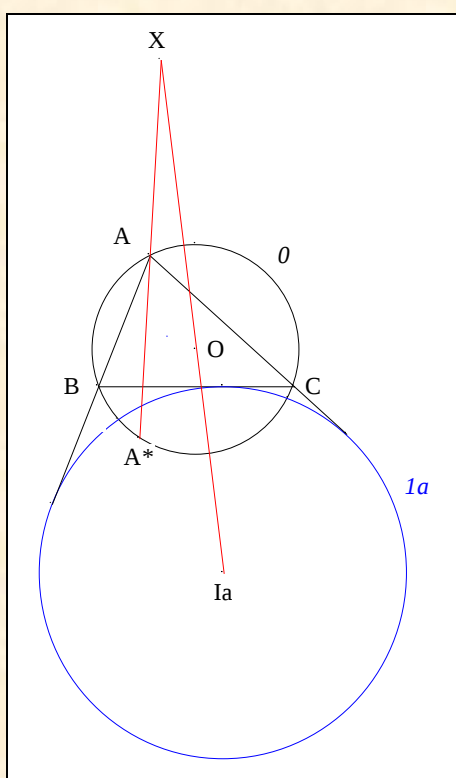


PROBLÈME 1 ²

**CENTRE EXTERNE D'HOMOTHETIE
DES
CERCLES
CIRCONSCRIT ET A-EXINSCRIT**

VISION

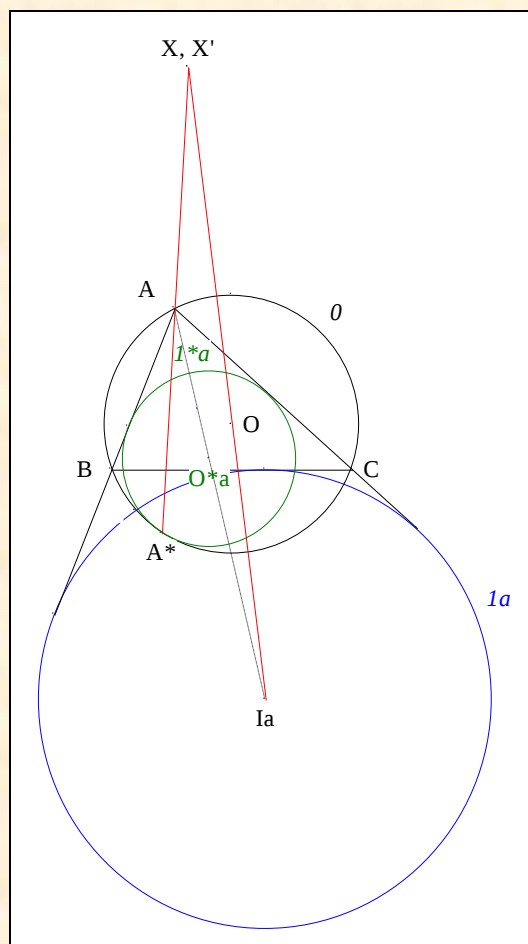
Figure :



Traits :	ABC	un triangle tel que $AB < AC$,
	$\theta, 1a$	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	O, Ia	les centres resp. de $\theta, 1a$,
	A*	le A-point de De Longchamps
et	X	le point d'intersection de (AA*) et (OIa).

Donné : X est le centre externe d'homothétie de O et $1a$.

VISUALISATION



- Notons X' le centre externe d'homothétie de O et $1a$,
 1^*a le A-mixtilinear incircle de ABC
 et O^*a le centre de 1^*a .

- D'après Simon L'Huilier ³,

- | | | |
|-----|---|----------------------------------|
| (1) | | X', O et Ia sont alignés. |
| (2) | A étant le centre externe d'homothétie de 1^*a et $1a$, | A, O^*a et Ia sont alignés |
| (3) | A^* étant le centre externe d'homothétie de 1^*a et O , | A^*, O^*a et O sont alignés. |

- D'après "La droite de D'Alembert" ⁴ appliqué à $O, 1^*a, 1a$,
 en conséquence, A^*, A et X' sont alignés.
 X' et X sont confondus.

- **Conclusion** : X est le centre externe d'homothétie de O et $1a$.

Archive :

Observation. La dénomination de cercle ex-inscrit a été introduite par Simon Lhuillier (*Annales de Gergonne*, tome 1, pag. 156, année 1812).

³ L'Huilier S. A. J., *Éléments d'analyse*, Paris et Genève (1809) 39, art. 28

⁴ Ayme J.-L., *Forme et mouvement*, G.G.G. vol. 20, p. 36-37 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

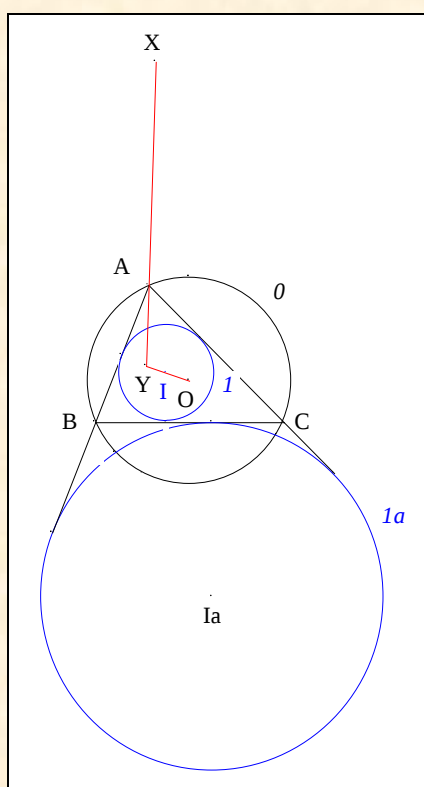


PROBLÈME 2 ⁵

CENTRE EXTERNE D'HOMOTHÉTIE DES CERCLES CIRCONSCRIT ET INSCRIT

VISION

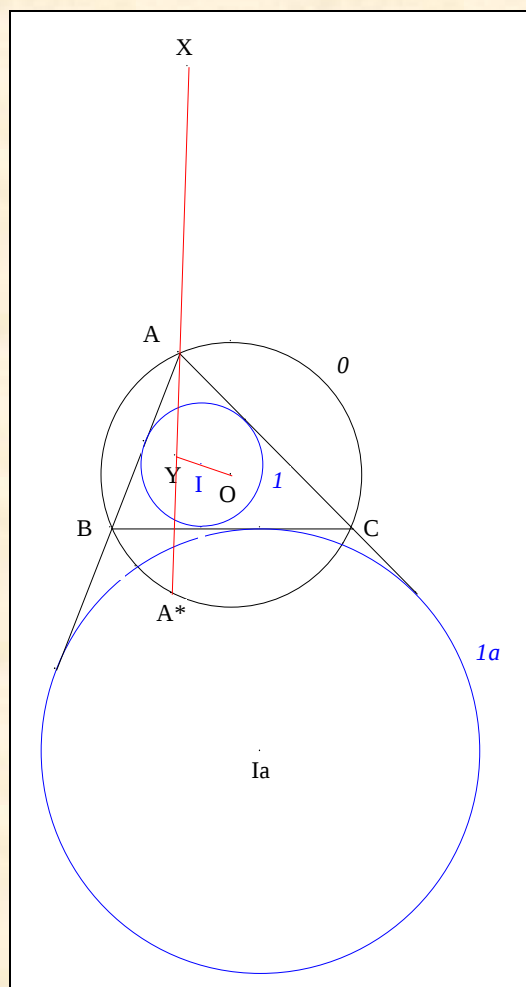
Figure :



Traits : ABC un triangle tel que $AB < AC$,
 O, I les cercles circonscrit, inscrit à ABC ,
 O, I les centres resp. de O, I ,
 X le centre externe d'homothétie de O et Ia .
 et Y le point d'intersection de (AX) et (OI) .

Donné : Y est le centre externe d'homothétie de O et I .

⁵ Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1892) 390



- Notons A^* le A-point de De Longchamps.
- **Conclusion :** d'après Problème 1 et l'axiome d'incidence Ia , X, A, Y et A^* sont alignés.

Note historique : la nature géométrique de Y a été donnée comme question par Eugène Lauvernay⁸ dans le *Journal de Mathématique Élémentaire* de 1892 et résolu par B. Sollertinsky⁹. Ce résultat a été rappelé par l'américain Paul Yiu¹⁰ en 1999 et par le français Jean-Pierre Ehrmann¹¹ en 2004.

Énoncé de Lauvernay : si l'on joint le point A', où la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC rencontre le cercle circonscrit, au centre I du cercle inscrit, cette droite (AI) rencontre le cercle circonscrit en un second point P. Démontrer que (AP) passe par le centre de similitude externe des circonférences considérées.

⁸ Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1892) 390

⁹ Sollertinsky B., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1893) 37, 72

¹⁰ Yiu P., Mixtilinear incircles, *Amer. Math. Monthly*, **106** (1999) 952-955

¹¹ Ehrmann J.-P., Fwd (Darij Grinberg): New triangle center in connexion with an Iranian Math. Olympia, Iran 1997, Message *Hyacinthos* # 6115 (06/12/2004) ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6115>

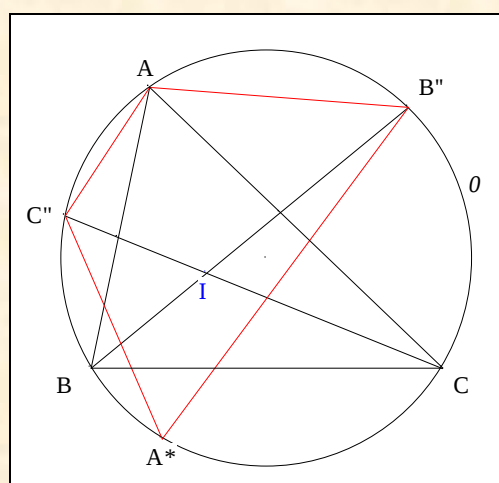


PROBLÈME 3

UN QUADRILATÈRE HARMONIQUE

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 I le centre de ABC ,
 B'', C'' les seconds points d'intersection de (BI) , (CI) avec O
 et A^* le A-point de De Longchamps de ABC .

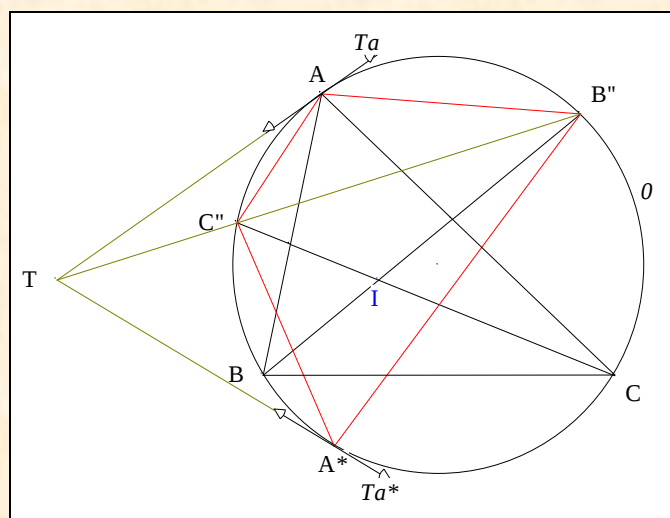
Donné : le quadrilatère $AB''A^*C''$ est harmonique.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.¹²

¹²

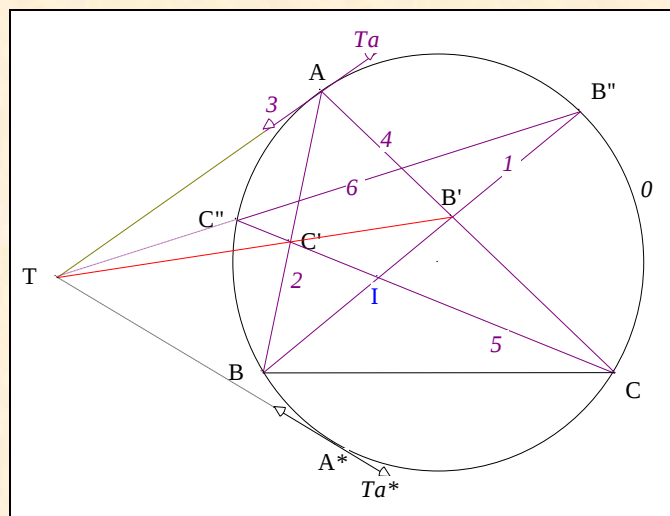
Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 39-41 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Scolies : (1) trois droites concourantes



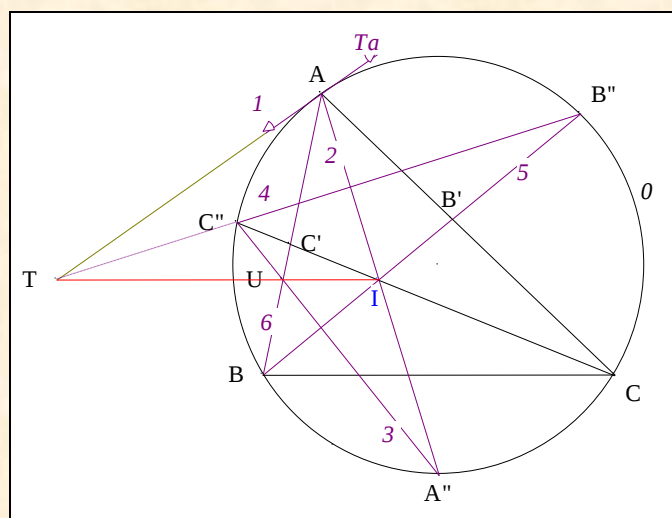
- Notons Ta, Ta^* les tangentes à O en A, A^* .
- **Conclusion :** $AB''A^*C''$ étant harmonique, Ta, Ta^* et $(B''C'')$ sont concourants.
- Notons T ce point de concours.

(2) Une droite passant par T

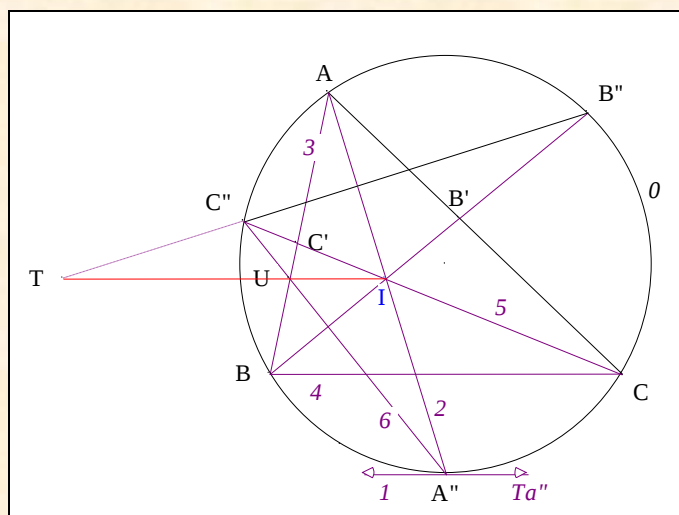


- Notons B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC) , (CI) et (AB) .
- D'après Colin MacLaurin-Pascal "Tetragramma mysticum", $(C'B'T)$ est la pascale de l'hexagone dégénéré $ABB''C''CA Ta$.
- **Conclusion :** $(B'C')$ passe par T .

(3) Une dernière droite passant par T ¹³



- Notons A'' le second point d'intersection de (AI) avec $\mathcal{O}$
et U le point d'intersection de $(A''C'')$ et (AB) .
- D'après Carnot "Pentagramma mysticum", (TIU) est la pascale de l'hexagone $Ta A''C''B''BA$.



- Notons Ta'' la tangente à $\mathcal{O}$ en A'' .
- **Scolie :** Ta'' est parallèle à (BC) .
- D'après "Le résultat d'Aubert-Pascal" ¹⁴
appliqué l'hexagone cyclique $Ta'' ABCC''A''$
 - (1) (IU) en est la pascale
 - (2) $(IU) \parallel (BC)$ ou encore $(IUT) \parallel (BC)$.
- **Conclusion :** (IU) passe par T et est parallèle à (BC) .

¹³ Ayme J.-L., A parallel to BC, AoPS du 19/01/2015 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=621628>

¹⁴ Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. 12 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



PROBLÈME 4 ¹⁵

DEUX PERPENDICULAIRES

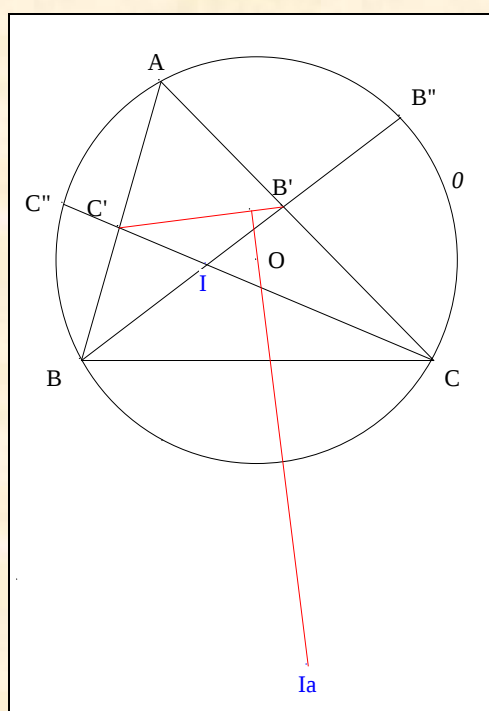
proposed

by

Darij Grinberg

VISION

Figure :

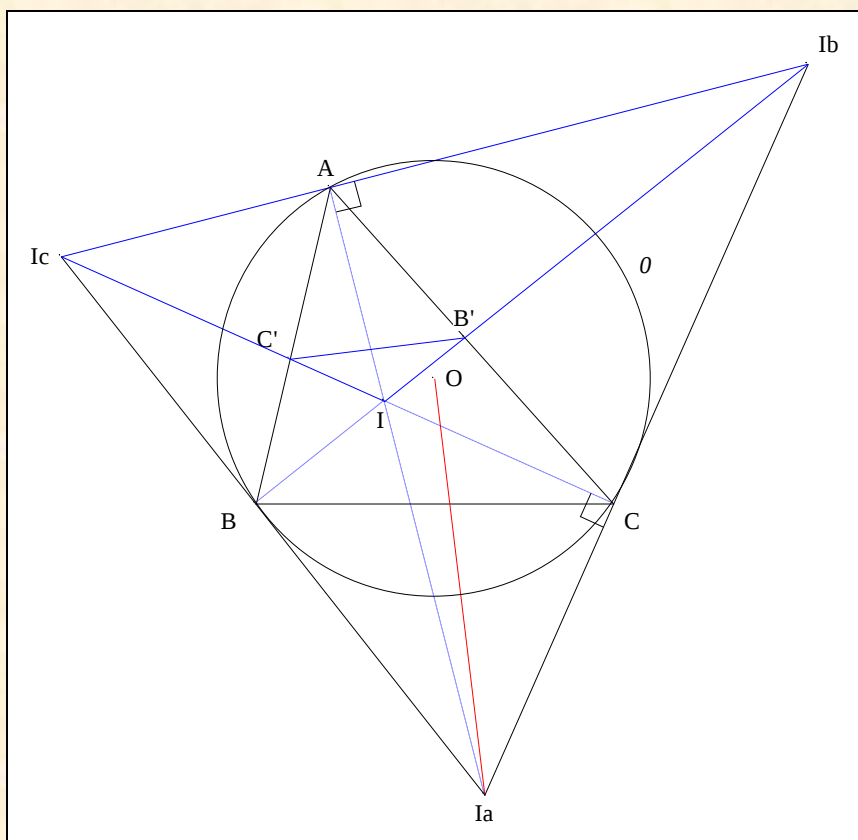


Traits :	ABC	un triangle,
	$\mathcal{O}$	le cercle circonscrit à ABC,
et	O	le centre de $\mathcal{O}$,
	Ia	le A-excentre de ABC
	B', C'	les points d'intersection resp. de (BI) et (AC), (CI) et (AB).

Donné : (OIa) est perpendiculaire à (B'C').

¹⁵ Grinberg D., Incentral Triangle question, Message *Hyacinthos* # 6542 du 15/02/2003 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6542>
 2016 USAMO 3, Inceners, Excenters, and Feet, OH MY!, AoPS du 19/04/2016
<https://artofproblemsolving.com/community/c5h1230491p6213572>
 Geometry lemma, AoPS du 09/10/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1720231_geometry_lemma

VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC ,
et I_b, I_c les B, C -excentres de ABC
 O le cercle circonscrit de ABC .
- **Scolies :**
 - (1) I est l'orthocentre du triangle excentral $I_a I_b I_c$ de ABC
 - (2) I_a est l'orthocentre du triangle $I I_b I_c$.
- D'après "Le théorème d'Hamilton", O est le cercle d'Euler de $I I_b I_c$;
en conséquence, (OI_a) est la droite d'Euler de $I I_b I_c$.
- Par définition,
 - (1) ABC est le triangle orthique de $I I_b I_c$
 - (2) $(B'C')$ est l'axe orthique de $I I_b I_c$.
- **Conclusion :** (OI_a) est perpendiculaire à $(B'C')$.¹⁶

16

Ayme J.-L., La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

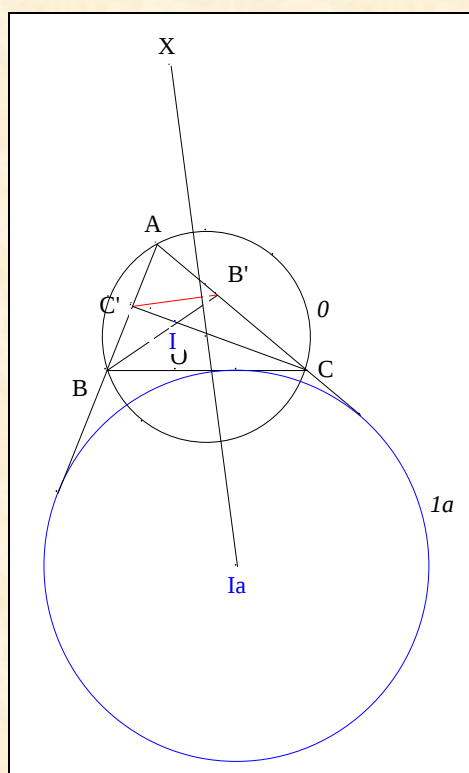


PROBLÈME 5 ¹⁷

LA POLAIRE DE X

VISION

Figure :

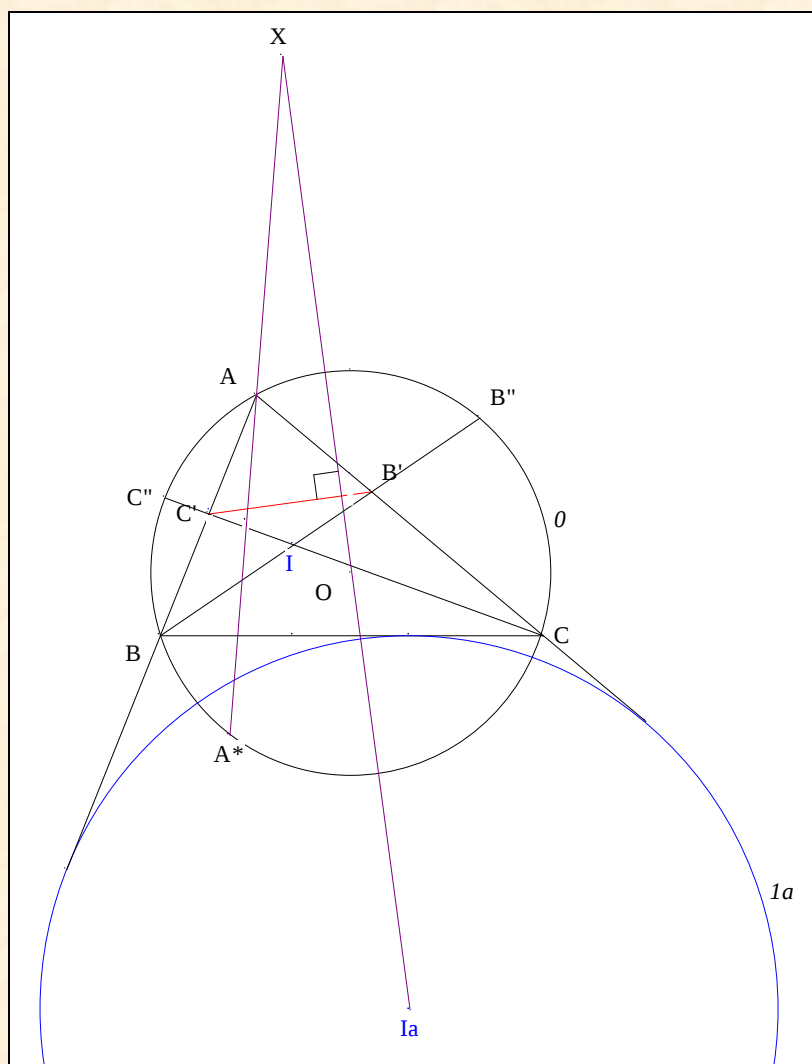


Traits :	ABC	un triangle,
	O, I_a	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	O, I_a	les centres resp. de O, I_a ,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
et	X	le centre externe d'homothétie de O et I_a .
Donné :	$(B'C')$ est la polaire de X relativement à O .	

¹⁷

small lemma, AoPS du 25/09/2016 ; <https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1310593p7020620>

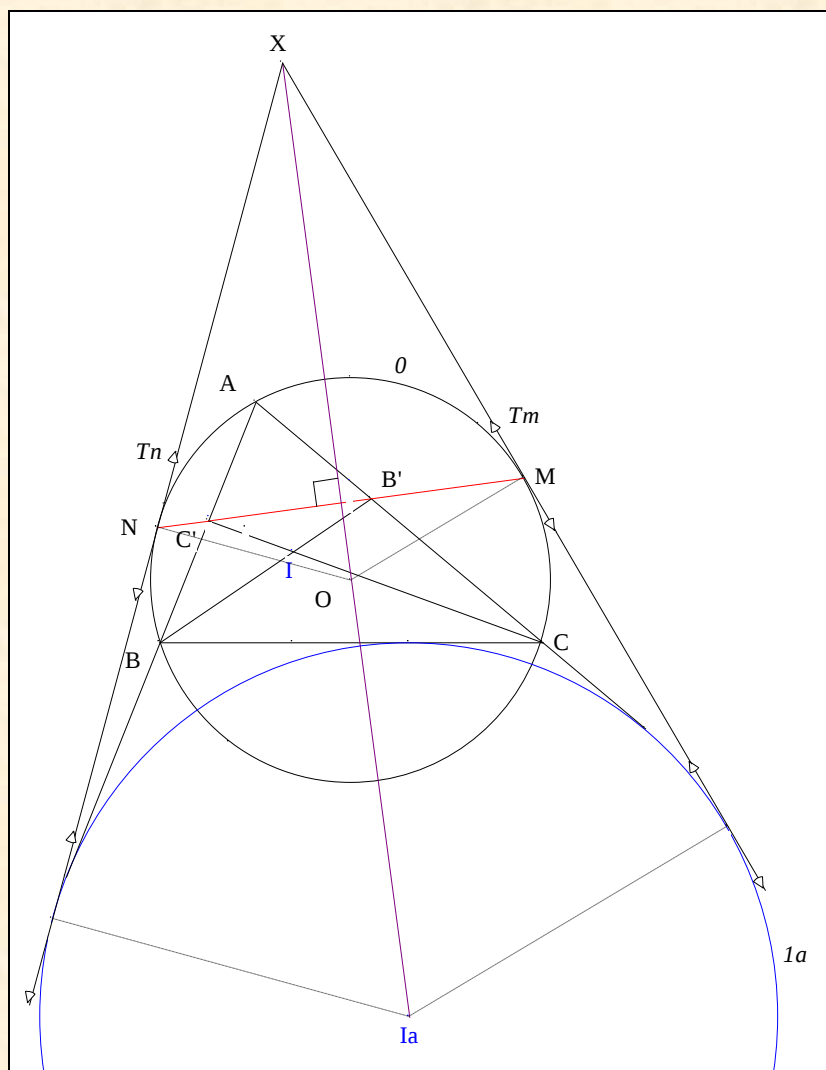
VISUALISATION



- Notons A^* le A-point de De Longchamps de ABC .
- D'après Problème 4, (OIa) est perpendiculaire à $(B'C')$.
- D'après Problème 1, O , Ia et X sont alignés.
- D'après Philippe de La Hire ¹⁸, la polaire de X est parallèle à $(B'C')$.
- D'après Problème 2, A^* , A et X sont alignés.

¹⁸

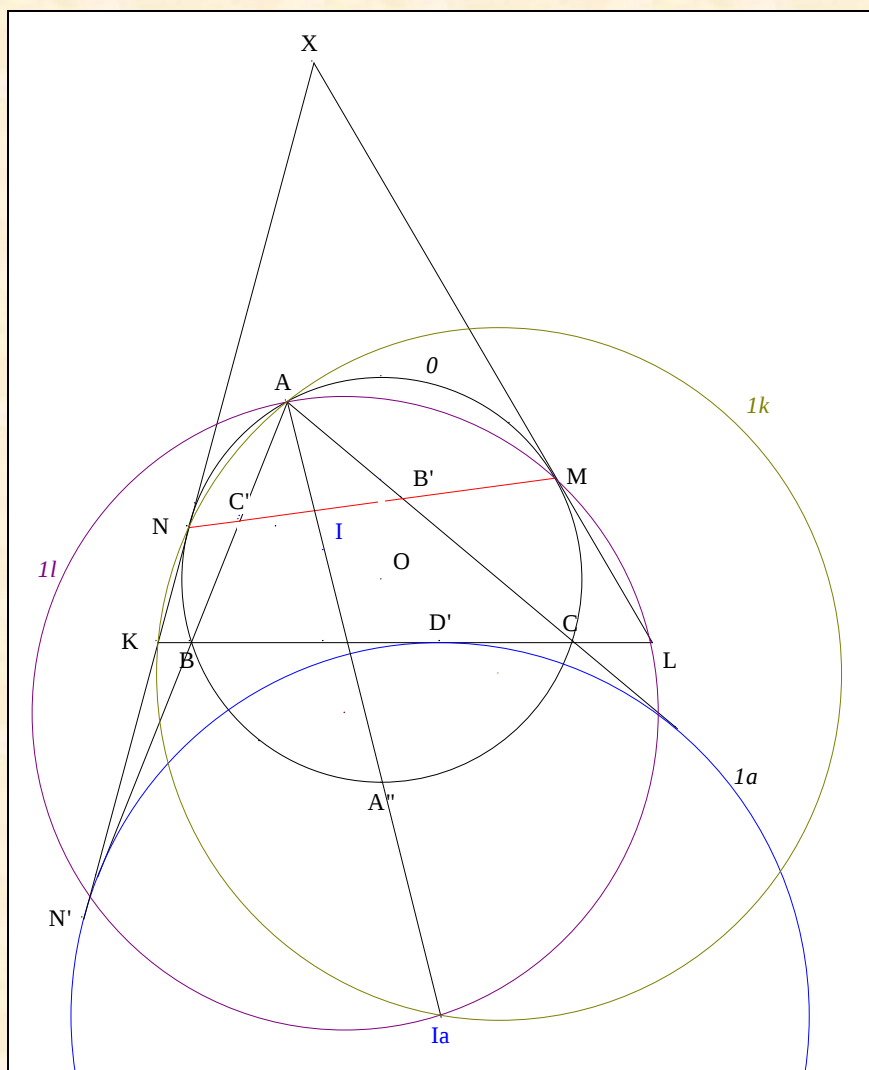
Ayme J.-L., Réciprocité polaire, G.G.G. vol. 13, p. 2-3 ; <http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/>



- **Conclusion :** X étant le centre externe d'homothétie de O et Ia ,
 (XM) et (XN) sont les deux tangentes communes extérieures à O et Ia .

(3) Un cercle

- Notons $1k$ ce cercle.
- (4) Le cercle gémellaire



- Notons L le point d'intersection de (XM) et (BC) .
 - **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que A, M, L et I_a sont cocycliques.
 - Notons l ce cercle.
- (5) Deux A-isogonales de ABC ²¹

²¹ Very hard, AoPS du 05/01/2011 ; <https://artofproblemsolving.com/community/c6h385175>



PROBLÈME 6 ²³

UN CERCLE INATTENDU

POUR

UN RÉSULTAT INATTENDU

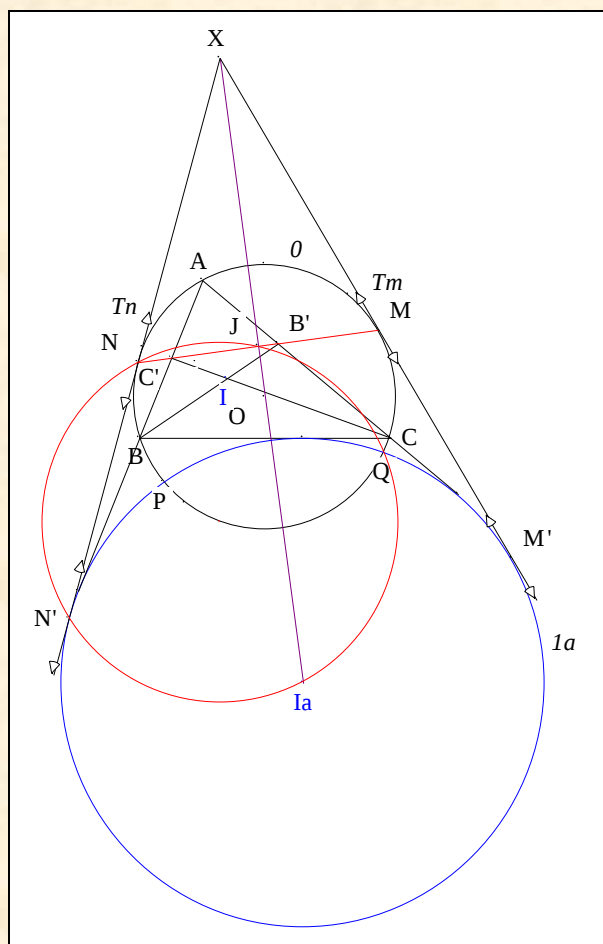
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

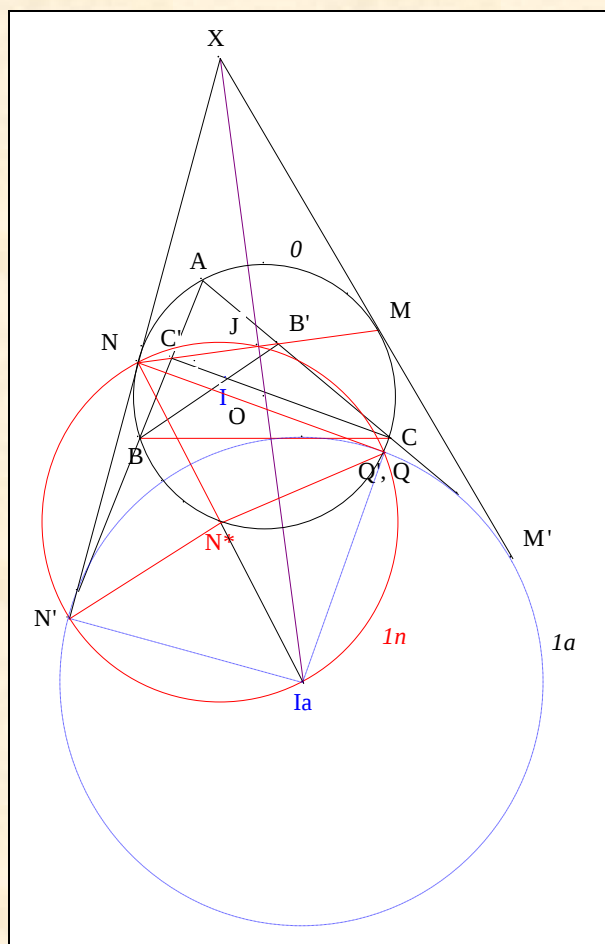
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O, Ia	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	O, Ia	les centres resp. de O, Ia ,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	X	le centre externe d'homothétie de O et Ia ,
	M, N	les seconds points d'intersection de $(B'C')$ avec O ,
	M', N'	les points de contact de Ia resp. avec $(XM), (XN)$,
	J	le point d'intersection de (XIa) et (MN) ,
et	P, Q	les points d'intersection de Ia et O .

Donné : N, N', Ia, J et Q sont cocycliques.

VISUALISATION



- Par symétrie d'axe (IaN^*N), $IaN' = IaQ'$;
 en conséquences,
 - (1) $1a$ passe par Q'
 - (2) Q' et Q sont confondus
 - (3) $1n$ passe par Q .
- **Conclusion** : N, N', Ia, J et Q sont cocycliques.

Scolie : (1) le résultat inattendu ou deux segments égaux ²⁶

²⁶

Ayme J.-L., A relation, AoPS du 22/09/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1711324_a_relation



PROBLÈME 7 ³⁰

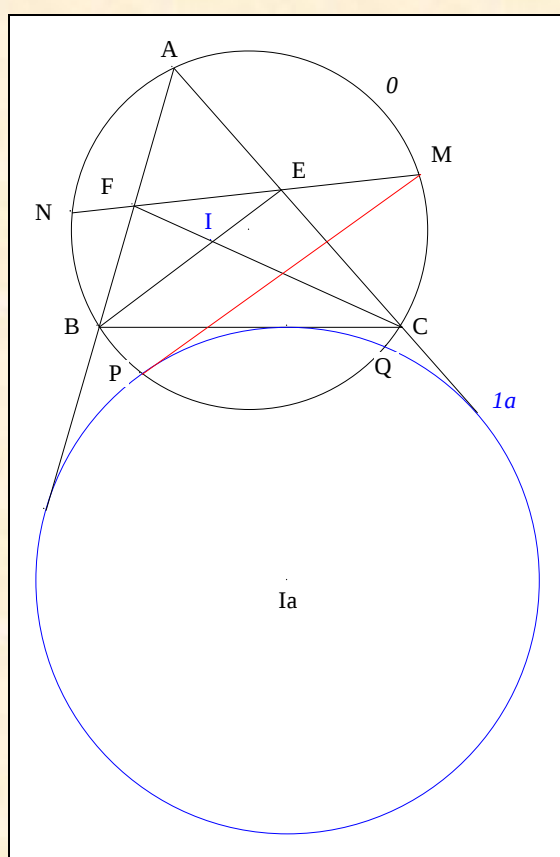
UNE TANGENTE

PAR

UNE APPROCHE SYNTHÉTIQUE

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O, Ia les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
 O, Ia les centres resp. de O, Ia ,
 P, Q les points d'intersection de Ia avec O ,
 I le centre de ABC,
 B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC) , (CI) et (AB) ,
 et M, N les points d'intersection de (MN) avec O .

Donné : (MP) est tangente à Ia en P .

³⁰

Interesting problem about excircle, AoPS du 30/04/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=587722>
 Ayme J.-L., Tangent to the A-excircle, AoPS du 20/09/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710320_a_tangent_to_the_aexcircle



PROBLÈME 8 ³²

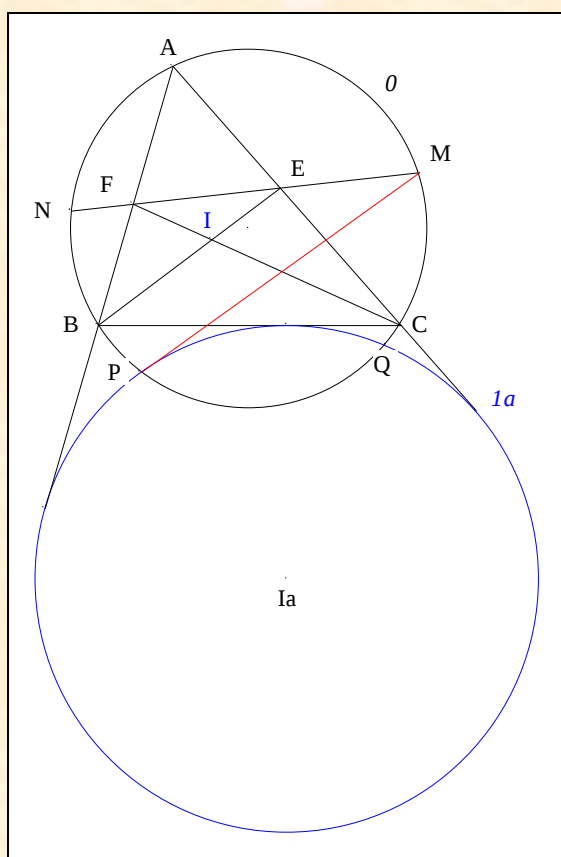
UNE TANGENTE

PAR

UNE APPROCHE MÉTRIQUE

VISION

Figure :



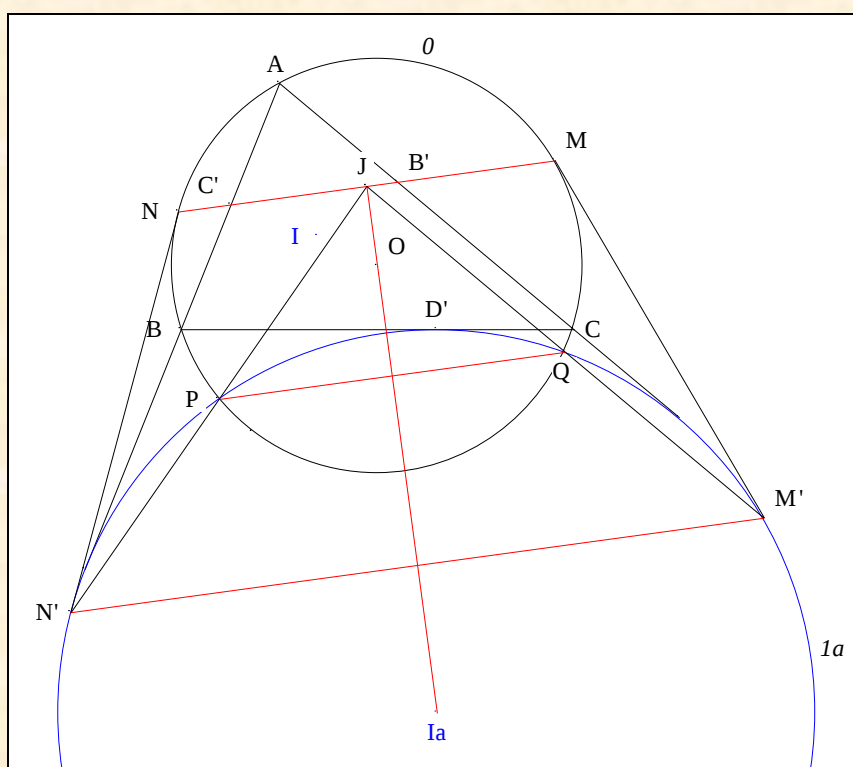
Traits : ABC un triangle,
 O, Ia les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
 O, Ia les centres resp. de O, Ia ,
 P, Q les points d'intersection de Ia avec O ,
 I le centre de ABC,
 B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC) , (CI) et (AB) ,
 et M, N les points d'intersection de (MN) avec O .

Donné : (MP) est tangente à Ia en P .

³²

Interesting problem about excircle, AoPS du 30/04/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=587722>
 Ayme J.-L., Tangent to the A-excircle, AoPS du 20/09/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710320_a_tangent_to_the_aexcircle

VISUALISATION



- Notons M', N' les points de contact de $1a$ avec les tangentes communes extérieures à O et $1a$,
 J le point d'intersection de (IaO) et (MN) ,
 R, Ra les rayons resp. de $O, 1a$,
 d, l les longueurs resp. de $[OIa], [MM']$.
- D'après Euler "Une formule" ³³, $d^2 = R^2 + 2.RRa$.
- **Scolies :**
 - (1) $(MN), (PQ)$ et $(M'N')$ sont parallèles entre elles
 - (2) (PQ) est la droite des milieux de triangle $JM'N'$
 - (3) $M'N' = 2.PQ$.

³³

F.-G.M., *Exercices de Géométrie*, Problème 629, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) 831
 Johnson R. A., *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston, 1929, p. 187

- Notons l' la longueur de $[MP]$.
- Le trapèze $MNPQ$ étant un trapèze isocèle, $MQ = NP$ et $MP = NQ$.
- D'après Claude Ptolémée "Le théorème" appliqué à $MNPQ$, $MP.NQ = MQ.NP + MN.PQ$
- par substitution, $l'^2 = (x/2)^2 + x.(x'/2)$
- $l'^2 = (Rl/d)^2 + (2.Rl/d).(Ra/d)$
- par simplification, $(l'/l)^2 = (R^2 + 2.RRa)/d^2$
- i.e. $(l'/l)^2 = 1$
- en conséquence, l' et l sont égaux.
- **Conclusion** : d'après Euclide d'Alexandrie ³⁴, (MP) est tangente à la en P .

³⁴ Conséquence de la proposition 36 du Livre III des *Éléments* d'Euclide.

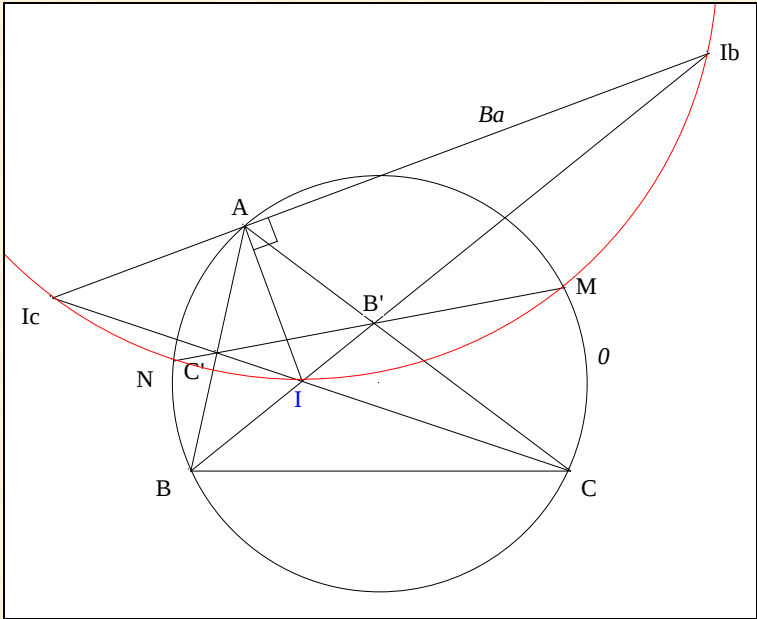


PROBLÈME 9 ³⁵

CINQ POINTS COCYCLIQUES

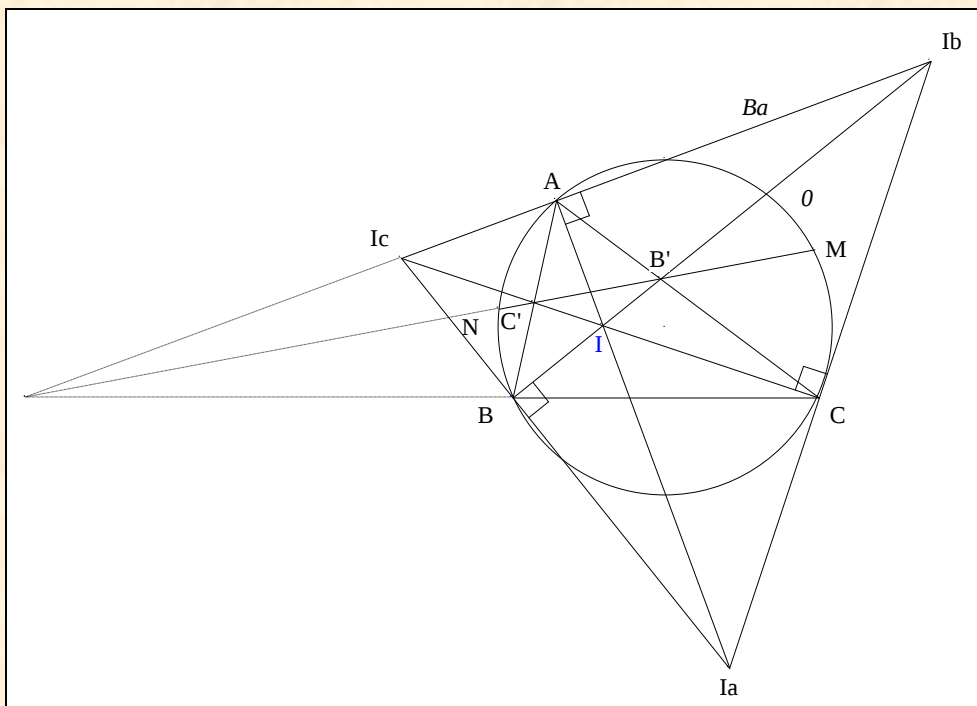
VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec O comme indiqué sur la figure,
	Ba	la A-bissectrice extérieure de ABC
et	Ib, Ic	les points d'intersection de Ba resp. avec (BI), (CI).
Donné :	Ib, Ic, M, N et I sont cocycliques.	

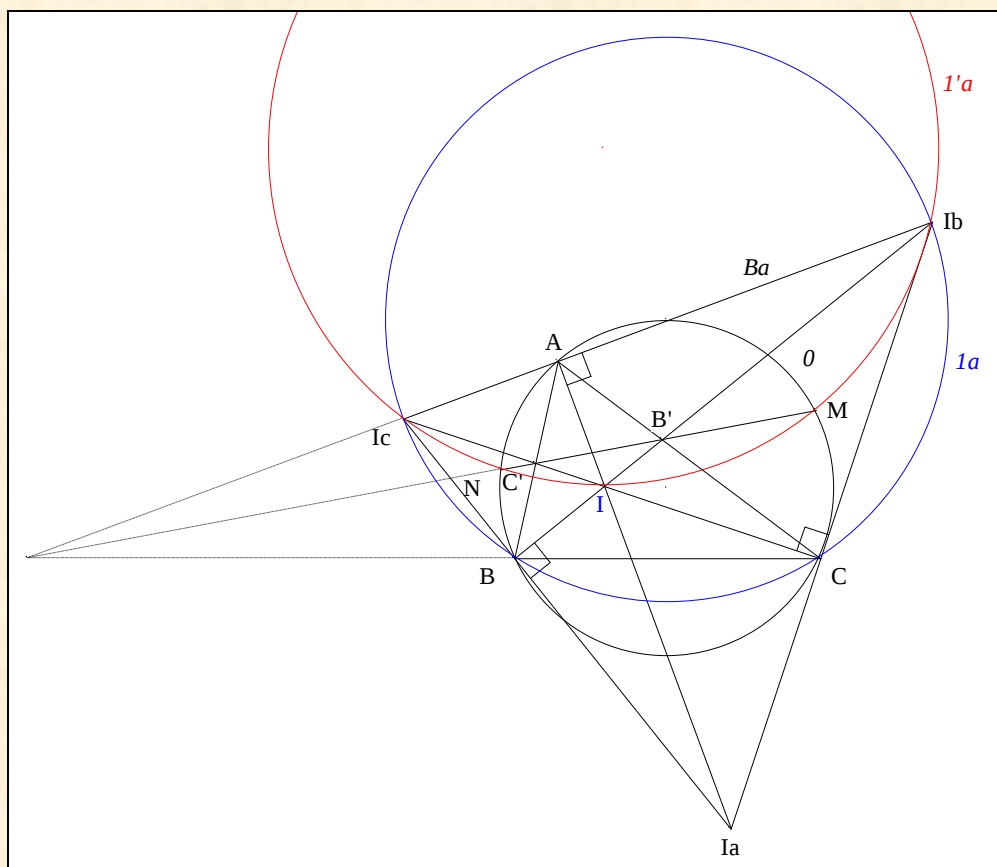
VISUALISATION



- **Scolie :** I_b, I_c sont resp. les B, C-excentres de ABC.
- Notons I_a le A-excentre de ABC.
- **Scolies :**
 - (1) $I_a I_b I_c$ est le triangle excentral de ABC
 - (2) I est l'orthocentre de $I_a I_b I_c$
 - (3) O est le cercle d'Euler de $I_a I_b I_c$.
- D'après Girard Desargues "Le théorème des deux triangles" ³⁶
 (AII_a) étant l'arguésienne des triangles $BC'I_c$ et $CB'I_b$, $(BC), (C'B')$ et $(I_c I_b)$ sont concourantes.

³⁶

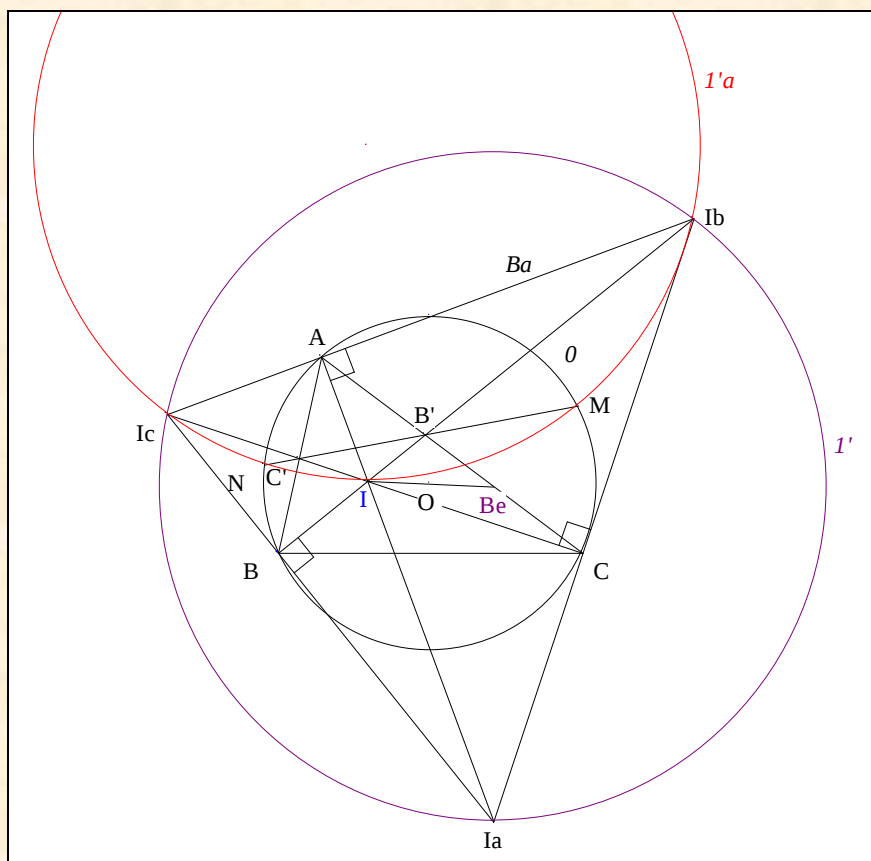
Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 7, p. 40-42 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons $1a$ le cercle de diamètre $[IbIc]$; il passe par B et C.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ³⁷, Ib, Ic, M et N sont cocycliques.
- Notons $1'a$ ce cercle.

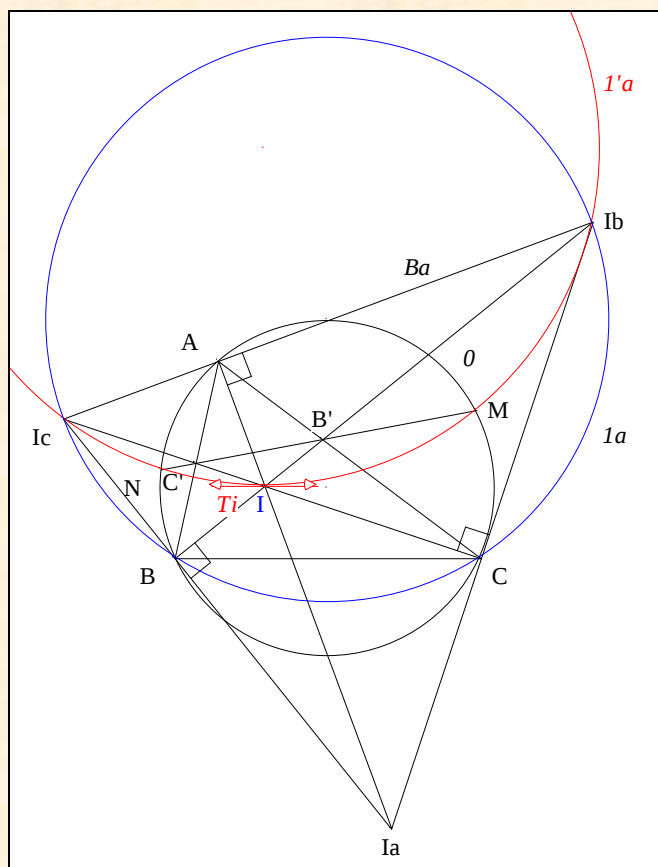
³⁷

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons O le centre de $\mathcal{O}$,
 R le rayon de $\mathcal{O}$,
 $\mathcal{I}'$ le cercle de Bevan de ABC ,
 Be le centre de $\mathcal{I}'$
 et R' le rayon de $\mathcal{I}'$.
- D'après Lazare Carnot "Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté",
 $\mathcal{I}'a$ est le symétrique de $\mathcal{I}'$ par rapport à $(IbIc)$.
- Par culture géométrique, O étant le milieu de $[IBe]$ ⁴⁰, $R' = 2.R$.
- **Conclusion :** les rayons de $\mathcal{I}'a$ et $\mathcal{I}'$ sont égaux.

(2) La tangente à $\mathcal{I}'a$ en I



- Notons T_i la tangente à $1a$ en I.
- Les cercles $1'a$ et $1a$, les points de base Ib et Ic, les moniennes (IibB) et (IicC), conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que $T_i \parallel (BC)$.
- **Conclusion** : T_i est parallèle à (BC).

(3) Le centre de $1'a$

- **Conclusion :** Ti , (RS) et (BC) sont parallèles entre elles.



PROBLÈME 10 ⁴²

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

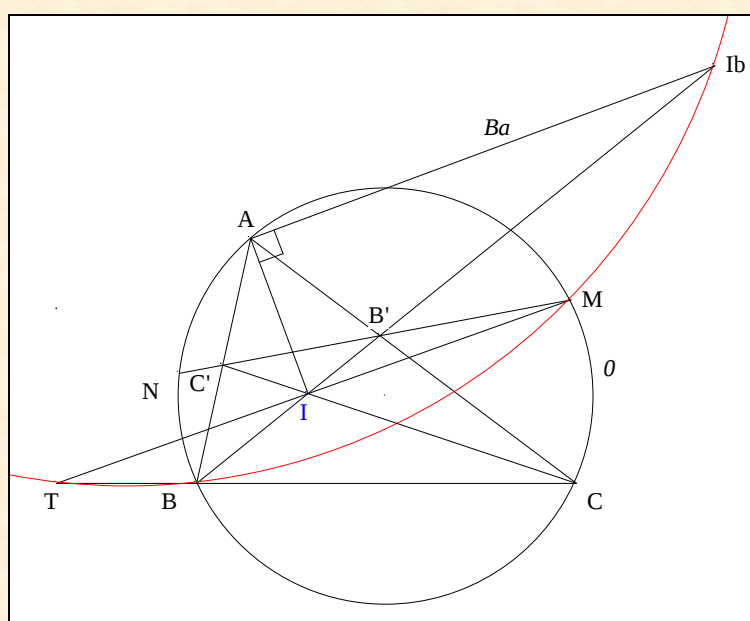
Proposed

by

Jean-Louis Ayme

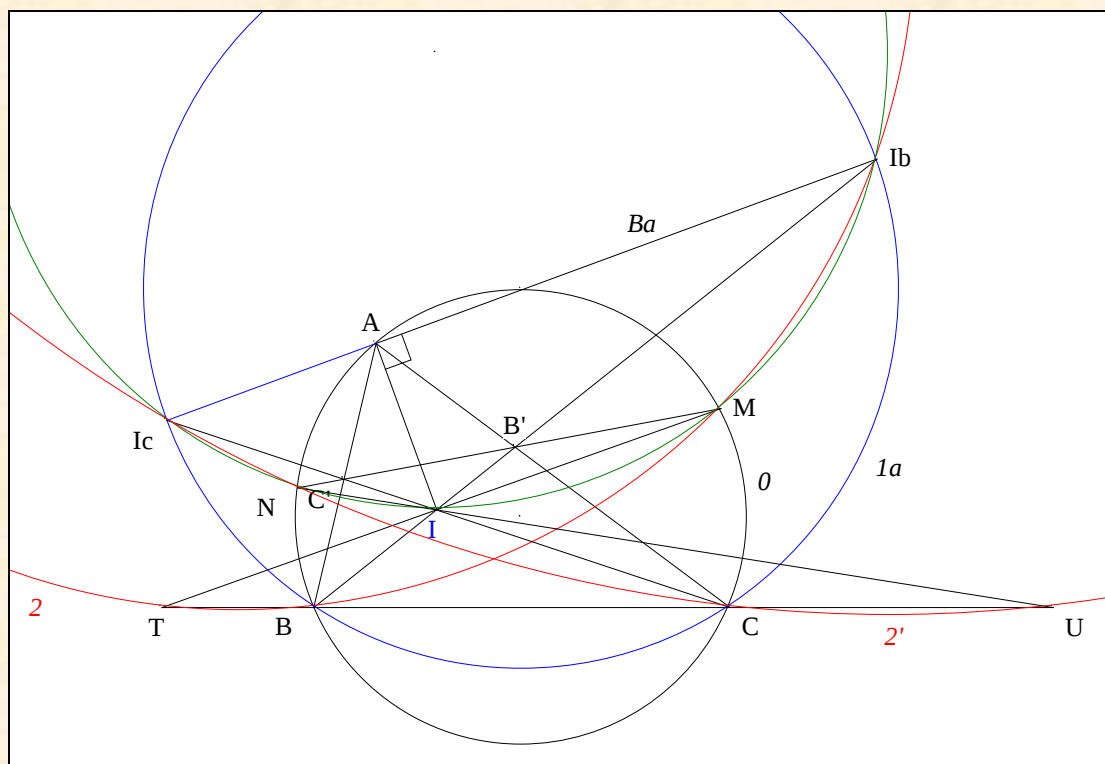
VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec O comme indiqué sur la figure,
	Ba	la A-bissectrice extérieure de ABC,
	Ib	le point d'intersection de Ba avec (BI)
et	T	le point d'intersection de (IM) et (BC).
Donné :	T, B, M et Ib sont cocycliques.	

VISUALISATION



- Notons U le point d'intersection de (IN) et (BC) .
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que U, C, N et I_c sont cocycliques.
- Notons $2'$ ce cercle.



PROBLÈME 11 ⁴⁴

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

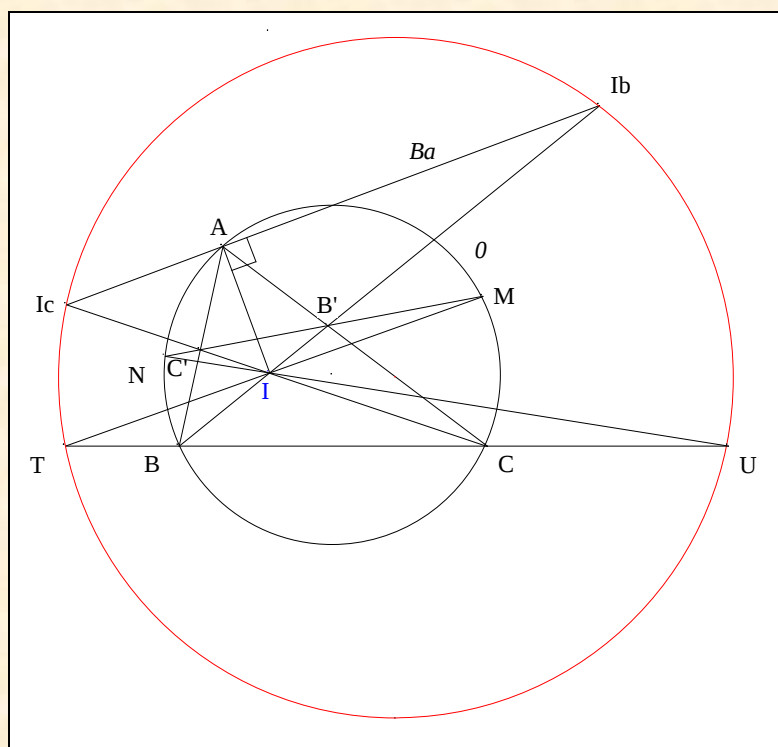
Proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits :

ABC

I

 B', C'

0

M, N

Ba

Ib, Ic

et

T, U

un triangle,

le centre de ABC ,

les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,

le cercle circonscrit à ABC ,

les points d'intersection de $(B'C')$ avec $\mathcal{O}$ comme indiqué sur la figure,

la A-bissectrice extérieure de ABC,

les B, C-excentres de ABC ,

les points d'intersection de (BC) resp. avec (IM), (IN).

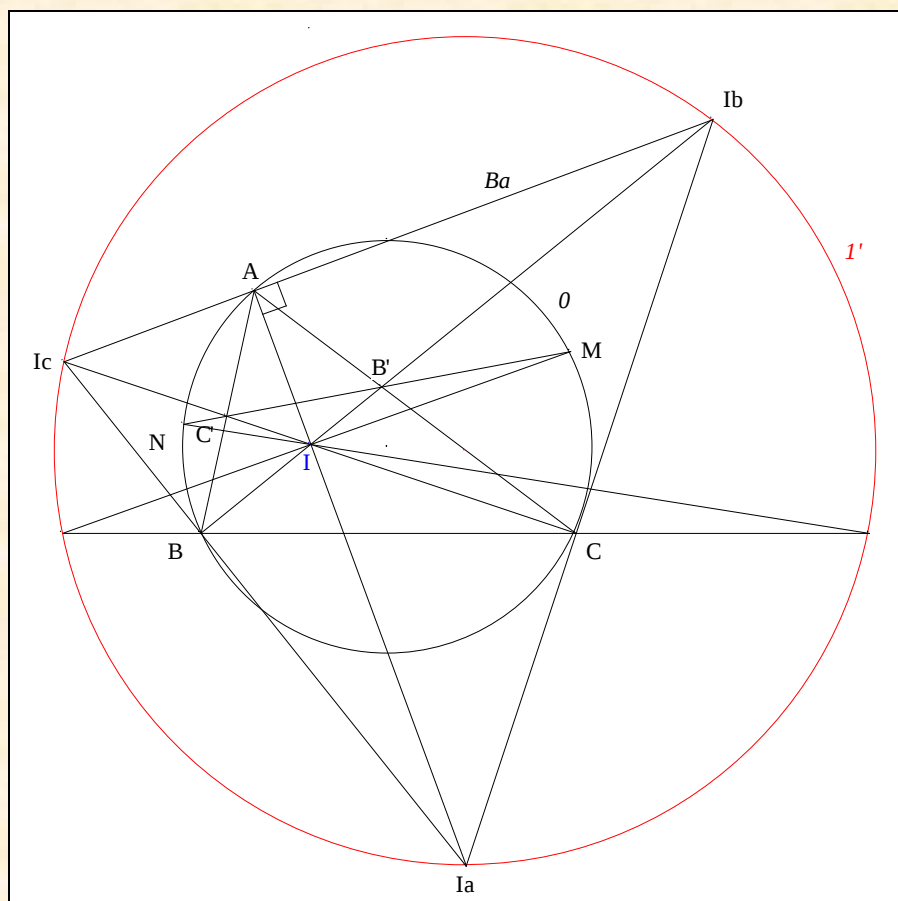
Donné :

T, Ic, Ib et U sont cocycliques.

- **Conclusion** : d'après Henri Léon Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" ⁴⁵, appliqué aux cercles 2, O , $2'$ et $1'a$ T , Ic , Ib et U sont cocycliques.

- Notons 1 ce cercle.

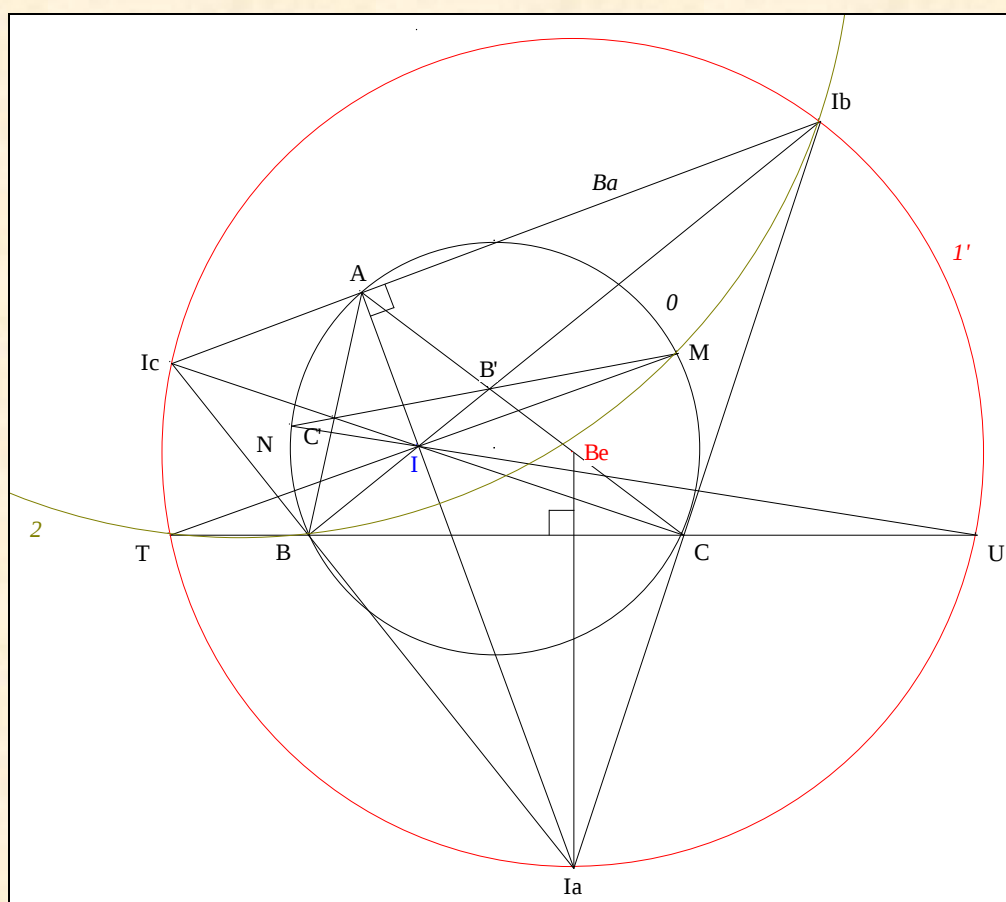
Scolies : (1) 1 est le cercle de Bevan de ABC ⁴⁶



- Notons Ia le A-excentre de ABC
et $1'$ le cercle de Bevan de ABC .
- Nous savons :
 - * ABC est le triangle orthique de $IaIbIc$
 - * O est le cercle d'Euler de $IaIbIc$
 - * par culture géométrique, $Ia.IA = Ib.IB = Ic.IC$
 - * $1'$ est l'inverse de O relativement au pôle I .

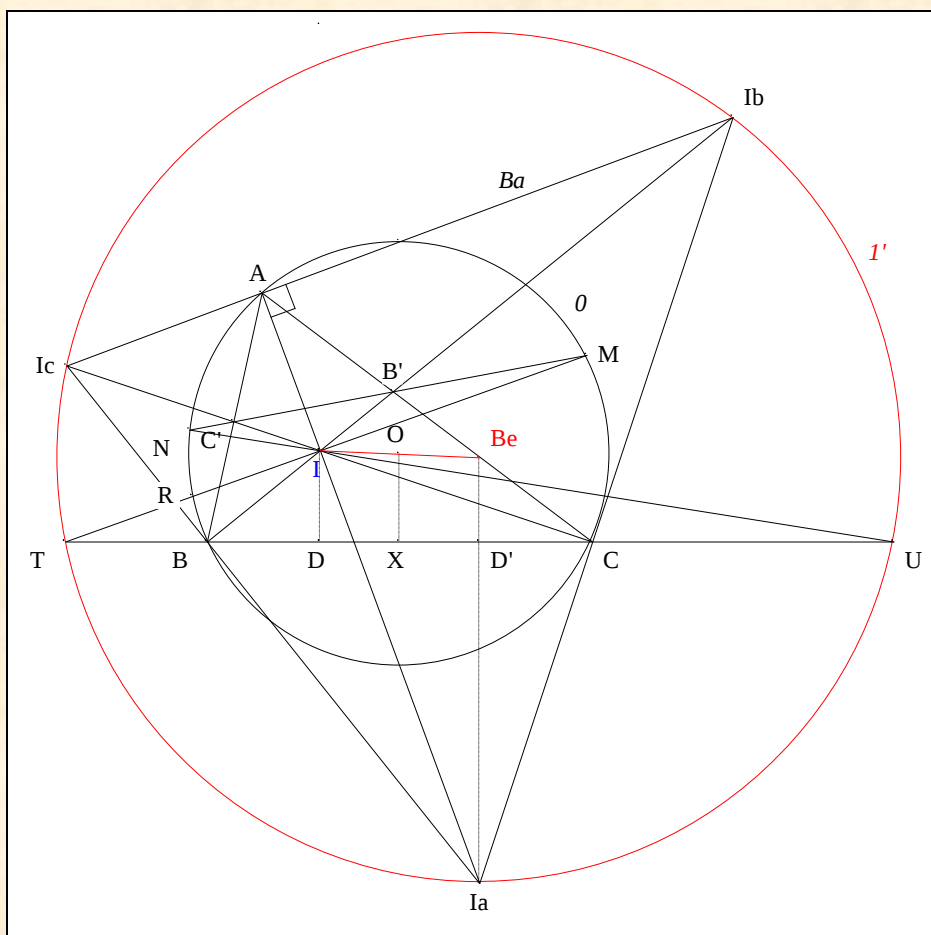
⁴⁵ Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ; <http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>

⁴⁶ Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, vol. 2, p. 9-11 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
Ayme J.-L., A point on the Bevan's circle, AoPS du 12/01/2017 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1367309_a_point_on_the_bevans_circle



- Relativement à 2, $Ib.IB = IM.IT$;
- **Conclusion partielle :** T est sur $1'$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que U est sur $1'$.
- **Conclusion :** 1 et $1'$ étant confondus, 1 est le cercle de Bevan de ABC.
- Notons Be le centre de 1 .

(2) Le point de contact du A-exercle de ABC



- Notons O le centre de $\mathcal{O}$,
 X le milieu de $[BC]$
 et D, D' les points de contact des cercles inscrit, A-exinscrit de ABC avec (BC) .

- D'après Benjamin Bevan ⁴⁷, I_a, D' et Be sont alignés.

- **Conclusion :** D' est le milieu de $[TU]$. ⁴⁸

(3) I_a et D' sont sur la médiatrice de $[TU]$

(4) Un milieu ⁴⁹

- Notons R le second point d'intersection de (MI) avec $\mathcal{O}$.

- **Conclusion :** O étant le milieu de $[IBe]$, R est le milieu de $[IT]$.

⁴⁷ Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18

Ayme J.-L., Cinq theorems de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 17-25 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁴⁸ Ayme J.-L., A nice midpoint, AoPS du 10/01/2017 ;

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1366432_a_nice_midpoint

⁴⁹ Ayme J.-L., Another nice midpoint, AoPS du 10/01/2017 ;

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1366447_another_nice_midpoint



PROBLÈME 12 ⁵⁰

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

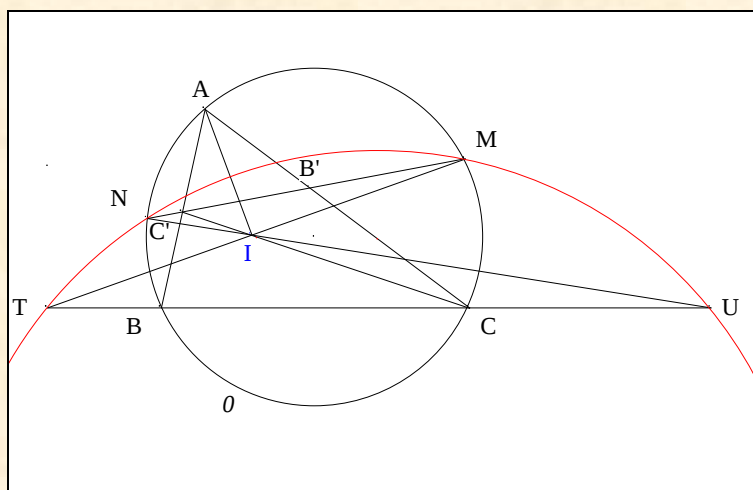
Proposed

By

Jean-Louis Ayme

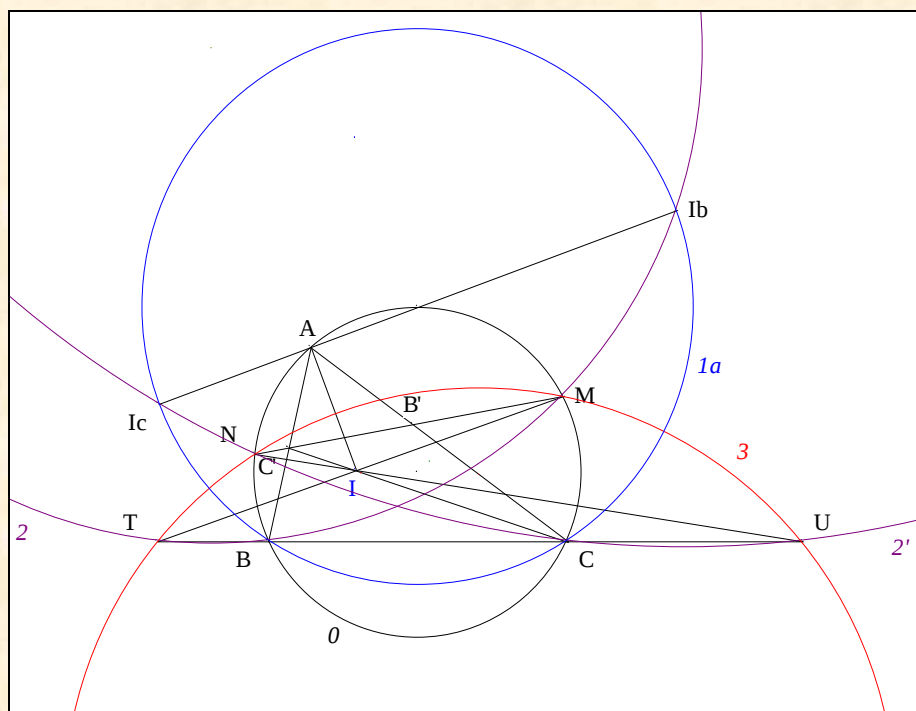
VISION

Figure :



- Traits :** ABC un triangle,
 I le centre de ABC ,
 B', C' les pieds des B, C -bissectrices intérieures de ABC ,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 M, N les points d'intersection de $(B'C')$ avec O comme indiqué sur la figure,
 Ba la A -bissectrice extérieure de ABC
 et T, U les points d'intersection de (BC) resp. avec (IM) , (IN) .
- Donné :** T, N, M et U sont cocycliques.

VISUALISATION



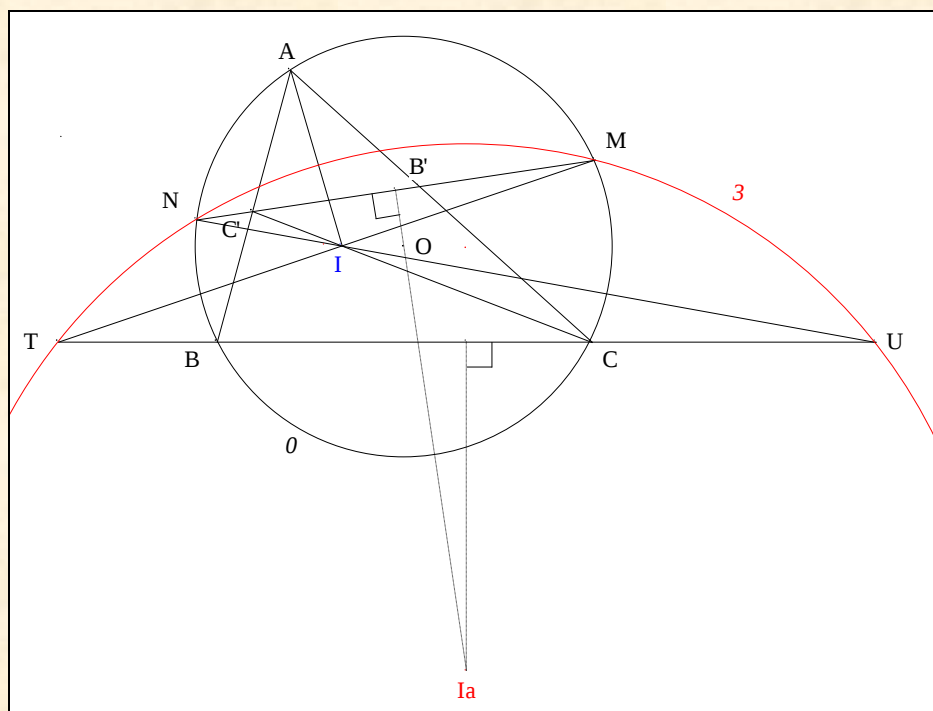
- Notons I_a, I_b les B, C-excentre de ABC,
- D'après Problème 10, T, B, M et I_b sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle.
- D'après Problème 10. scolie, U, C, N et I_c sont cocycliques.
- Notons $2'$ ce cercle
et 1_a le cercle de diamètre $[I_b I_c]$; il passe par B et C.
- **Conclusion :** d'après Henri Léon Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" ⁵¹,
appliqué aux cercles $2, 0, 2'$ et 1_a ,
 T, N, M et U sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.

Scolies : (1) le centre de 3

⁵¹

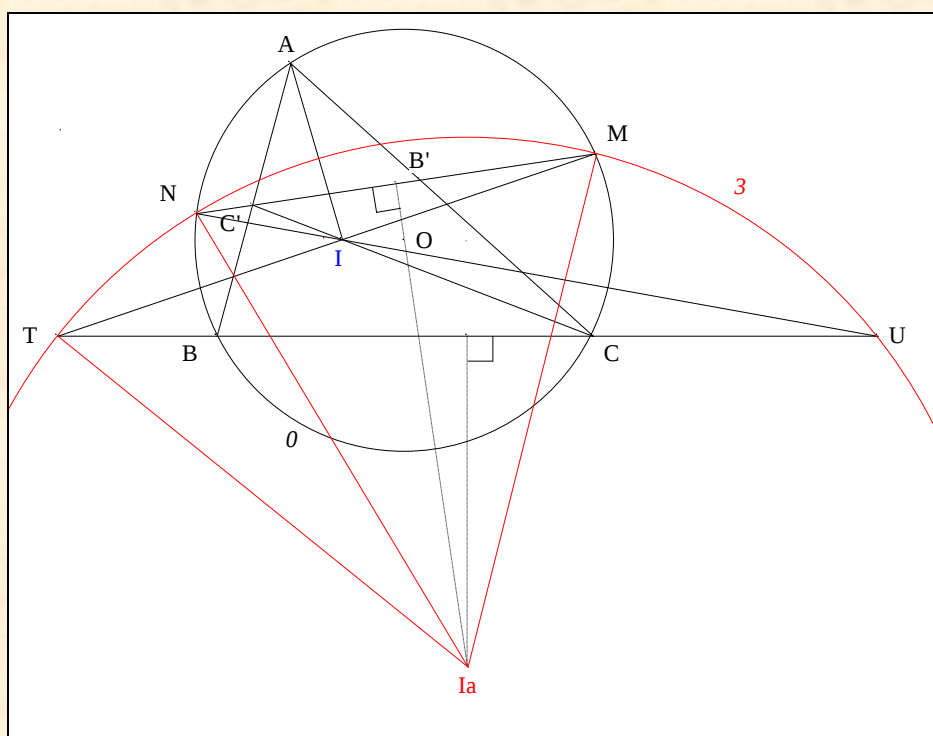
Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ;
<http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>

Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, vol. 2, p. 9-11 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

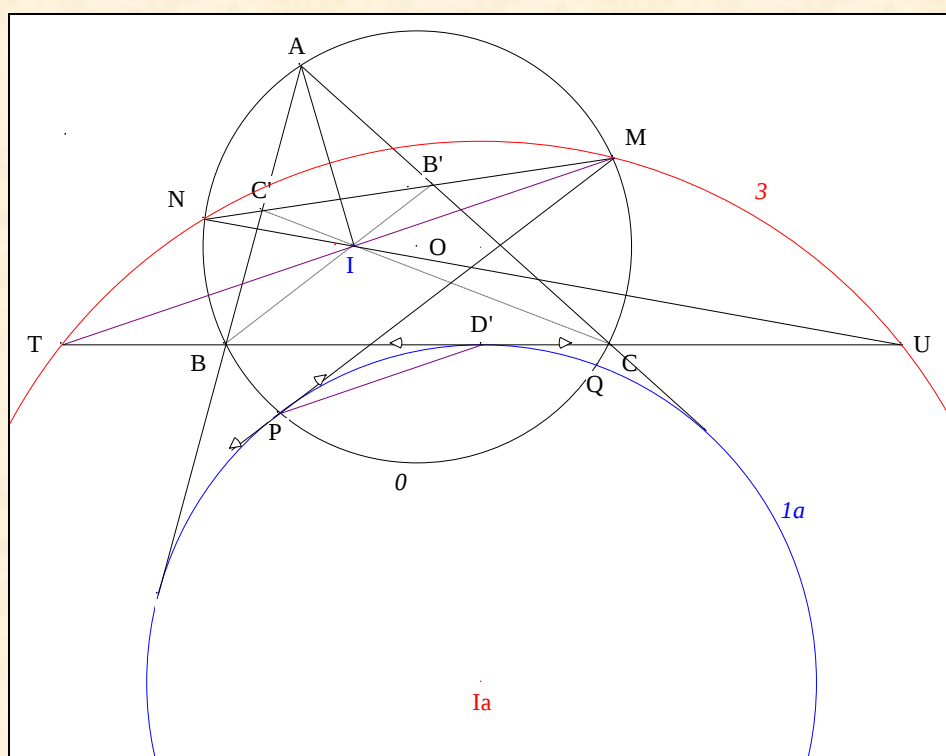


- D'après Problème 5 et 12, scolie 3, le centre de 3 est le point d'intersection des médiatrices de $[MN]$ et $[TU]$.
- **Conclusion :** Ia est le centre de 3.

(2) Trois segments égaux



- **Conclusion :** $IaT = IaM = IaN$.

(4) Des parallèles ⁵²

- Notons $1a$ le A-excercle de ABC,
et D' le point de contact de $1a$ avec (BC)
 P, Q les points d'intersection de $1a$ avec 0 .
- D'après Problème 8, (PM) est tangente à $1a$ en P.
- **Conclusion** : les cercles $1a$ et 3 étant concentriques, $(PD') \parallel (MIT)$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(QD') \parallel (NIU)$.

(5) Trois droites concourantes

52

Ayme J.-L., Two nice parallels, AoPS du 10/01/2017 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1366426_two_nice_parallel



PROBLÈME 13 ⁵⁴

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

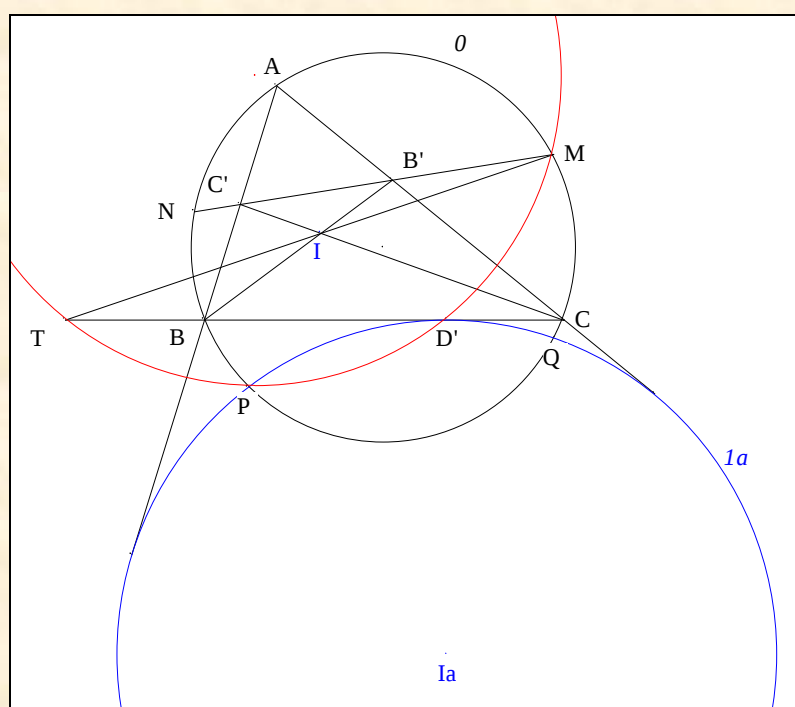
Proposed

By

Jean-Louis Ayme

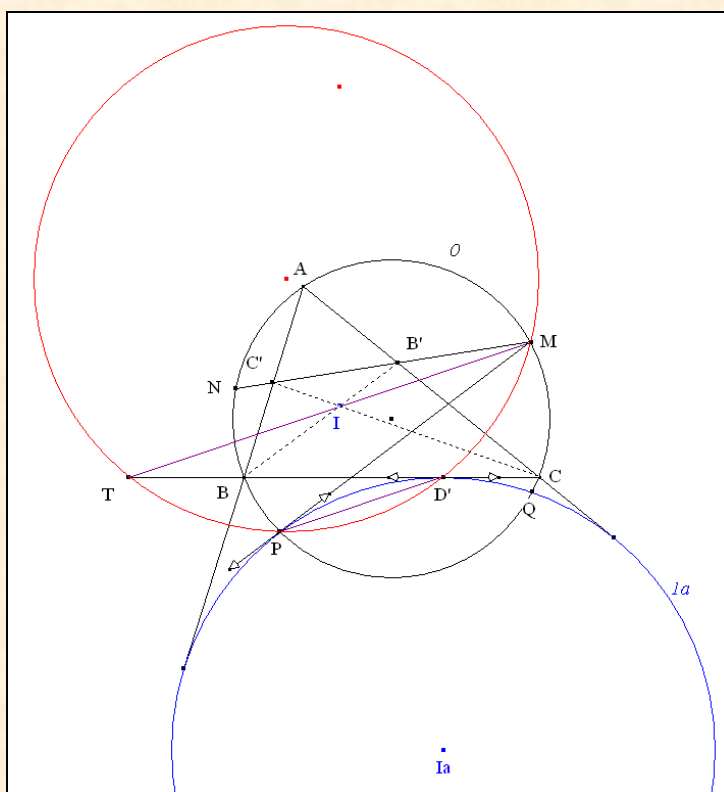
VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I, Ia	les centre, A-excentre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	O, Ia	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	D'	le point de contact de Ia avec (BC),
	P, Q	les points d'intersection de Ia avec O,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec O comme indiqués sur la figure
et	T	le point d'intersection de (BC) et (IM).
Donné :	P, D', M et T sont cocycliques.	

VISUALISATION



- D'après Problème 8, (PM) est tangente à $1a$ en P .
- D'après Problème 12, $(PD') \parallel (MIT)$.
- **Conclusion :** le cercle $1a$, les points de base P et D' , les moniennes naissantes (PPM) et $(D'D'T)$, les parallèles (PD') et (MIT) , conduisent au théorème 4'' de Reim ; en conséquence, P , D' , M et T sont cocycliques.

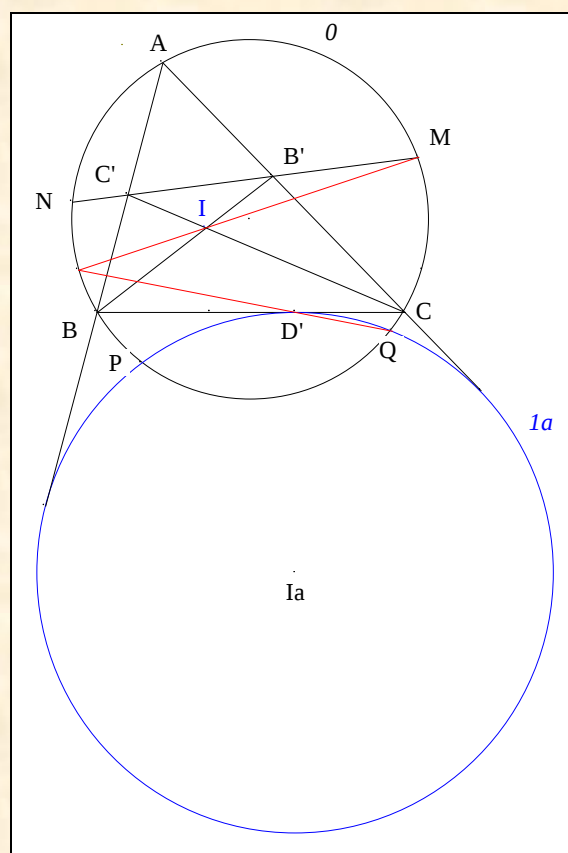
PROBLÈME 14 ⁵⁵

INTERSECTION SUR LE CERCLE CIRCONSCRIT

Proposed
by
Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



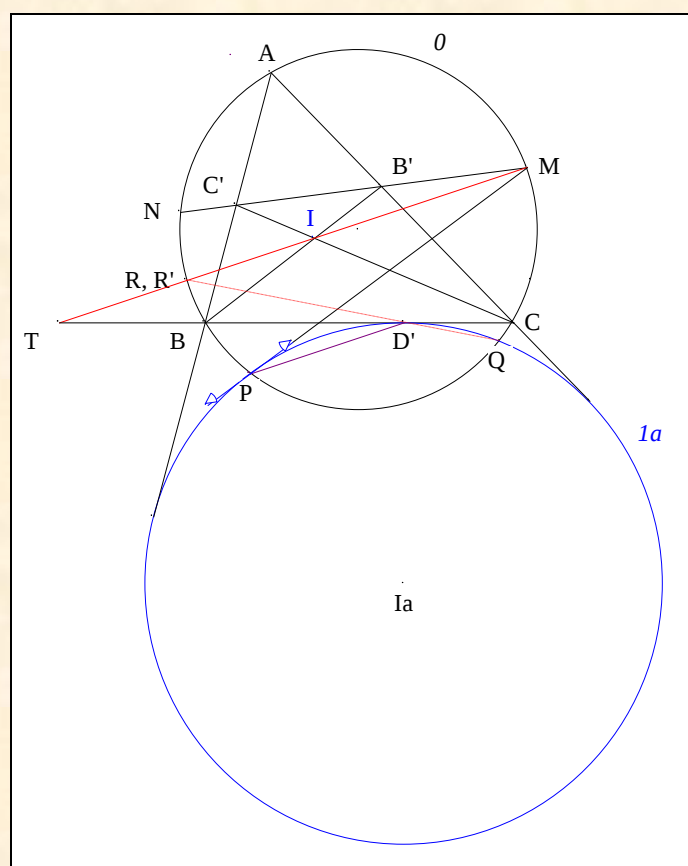
55

Prove intersection of PJ,NH lies in the nine-point circle, AoPS du 21/09/2018 ; <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710881p11043832>
Ayme J.-L., Intersection on the circumcircle, AoPS du 25/09/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1712817_intersection_on_the_circumcircle

Traits : ABC un triangle,
 I, I_a les centre, A-excentre de ABC ,
 B', C' les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC ,
 $O, 1a$ les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC ,
 D' le point de contact de $1a$ avec (BC) ,
 P, Q les points d'intersection de $1a$ avec O ,
 et M, N les points d'intersection de $(B'C')$ avec O comme indiqués sur la figure

Donné : (MI) et $(D'Q)$ se coupent sur O .

VISUALISATION



- Notons T le point d'intersection de (MI) et (BC) ,
 et R, R' les seconds points d'intersection de O resp. avec (MI) , (QD') .
- D'après Problème 8, (PM) est tangente à $1a$ en P .
- D'après Problème 12, $(MIRT) \parallel (PD')$.
- Les cercles $1a$ et O , les points de base P et Q , les monienne (PPM) et $(D'QR')$, conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que $(PD') \parallel (MR')$.
- Par transitivité de $\parallel$, $(MR) \parallel (MR')$;
 d'après le postulat d'Euclide, $(MR) = (MR')$;
 en conséquence, R' et R sont confondus.
- Conclusion :** (MI) et $(D'Q)$ se coupent sur O .