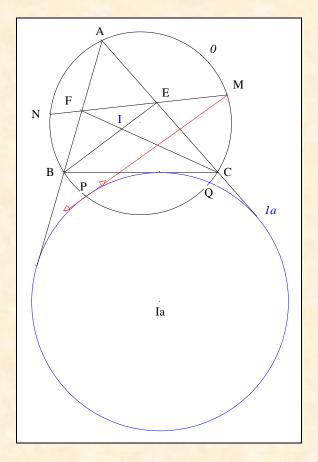
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE



UNE TANGENTE REMARQUABLE



Jean-Louis AYME 1



Résumé.

L'auteur présente l'étude d'un problème ardu où l'apprentissage et l'approfondissement se relayent subtilement pour le résoudre dans un premier temps et le solutionner dans un second temps.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract.

The author presents the study of a difficult problem where learning and deepening take turns subtly to solve it.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2018 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire				
1.	Centre externe d'homothétie des cercles circonscrit et A-exinscrit	3		
2.	Centre externe d'homothétie des cercles circonscrit et inscrit	5		
3.	Un quadrilatère harmonique	8		
4.	Deux perpendiculaires	11		
5.	La polaire de X	13		
6.	Un cercle inattendu pour un résultat inattendu	21		
7.	Une tangente par une approche synthétique	28		
8.	Une tangente par une approche métrique	30		
9.	Cinq points cocycliques	34		
10.	. Quatre points cocycliques	43		
11.	. Quatre points cocycliques	46		
12.	Cinq points cocycliques	51		
13.	. Quatre points cocycliques	56		
14.	Intersection sur le cercle circonscrit	58		



PROBLÈME 1²

CENTRE EXTERNE D'HOMOTHETIE

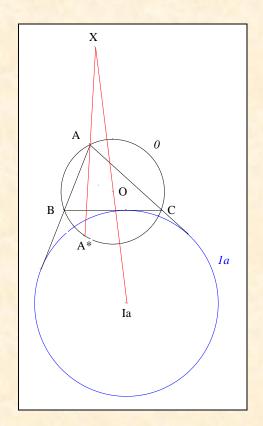
DES

CERCLES

CIRCONSCRIT ET A-EXINSCRIT

VISION

Figure:



Traits: ABC

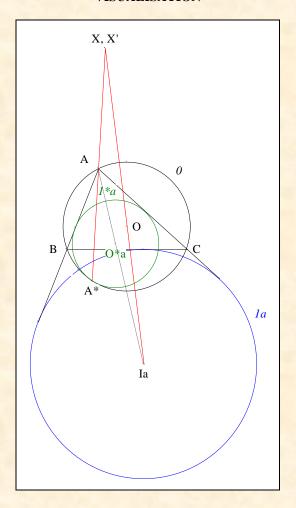
un triangle tel que AB < AC, les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC, 0, 1a

les centres resp. de 0, 1a, le A-point de De Longchamps le point d'intersection de (AA*) et (OIa). O, Ia A*

X

Donné: X est le centre externe d'homothétie de 0 et 1a.

VISUALISATION



- Notons X' le centre externe d'homothétie de 0 et 1a,
 - 1*a le A-mixtilinear incircle de ABC
 - O*a le centre de 1*a.
- D'après Simon L'Huilier 3,

(1)

- **(2)**
- A étant le centre externe d'homothétie de 1*a et 1a,
- A* étant le centre externe d'homothétie de 1*a et 0,
- D'après "La droite de D'Alembert" 4 appliqué à 0, 1*a, 1a, en conséquence,
- Conclusion : X est le centre externe d'homothétie de 0 et 1a.

X', O et Ia sont alignés.

A, O*a et Ia sont alignés

A*, O*a et O sont alignés.

A*, A et X' sont alignés. X' et X sont confondus.

Archive:

Observation. La dénomination de cercle ex-inscrit a été introduite par Simon Lhuillier (Annales de Gergonne, tome 1, pag. 156, année 1812).

LHuilier S. A. J., Éléments d'analyse, Paris et Genève (1809) 39, art. 28

Ayme J.-L., Forme et mouvement, G.G.G. vol. 20, p. 36-37; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



PROBLÈME 2 5

CENTRE EXTERNE D'HOMOTHETIE

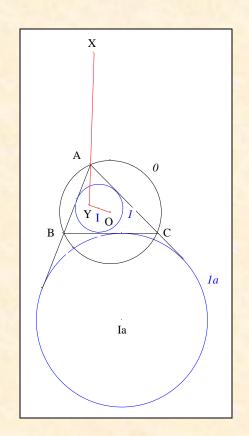
DES

CERCLES

CIRCONSCRIT ET INSCRIT

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle tel que AB < AC,

0, 1 les cercles circonscrit, inscrit à ABC,

O, I les centres resp. de 0, 1,

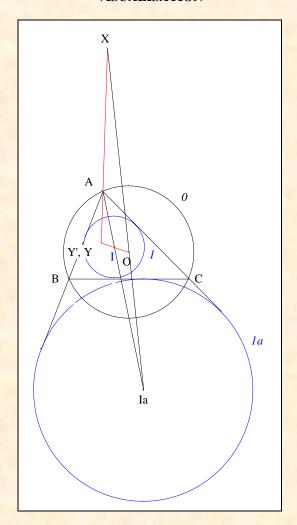
X le centre externe d'homothétie de 0 et 1a. et Y le point d'intersection de (AX) et (OI).

Donné : Y est le centre externe d'homothétie de θ et 1.

Lauvernay E. Journal de Mathématique

Lauvernay E., Journal de Mathématique Élémentaire (1892) 390

VISUALISATION



- Notons Y' le centre externe d'homothétie de 0 et 1.
- D'après L'Huilier 6,
 - **(1)**
 - (2) A étant le centre externe d'homothétie de 1 et 1a,
- D'après "La droite de D'Alembert" ⁷ appliqué à 0, 1, 1a, en conséquence,
- Conclusion : Y est le centre externe d'homothétie de 0 et 1.

Scolie: avec le A-point de De Longchamps

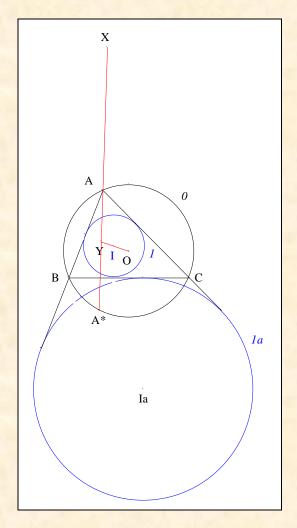
Y', O et I sont alignés.

A, I et Ia sont alignés

Y', A et X sont alignés. Y' et Y sont confondus.

⁶ LHuilier S. A. J., Éléments d'analyse, Paris et Genève (1809) 39, art. 28

Ayme J.-L., Forme et mouvement, G.G.G. vol. 20, p. 36-37; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons A* le A-point de De Longchamps.
- X, A, Y et A* sont alignés. Conclusion: d'après Problème 1 et l'axiome d'incidence Ia,

Note historique:

la nature géométrique de Y a été donnée comme question par Eugène Lauvernay 8 dans le Journal de Mathématique Élémentaire de 1892 et résolu par B. Sollertinsky 9. Ce résultat a été rappelé par l'américain Paul Yiu 10 en 1999 et par le français Jean-Pierre Ehrmann 11 en 2004.

Énoncé de Lauvernay: si l'on joint le point A', où la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC rencontre le cercle circonscrit, au centre I du cercle inscrit, cette droite (A'I) rencontre le cercle circonscrit en un second point P. Démontrer que (AP) passe par le centre de similitude externe des circonférences considérées.

Lauvernay E., Journal de Mathématique Élémentaire (1892) 390

Sollertinsky B., Journal de Mathématique Élémentaire (1893) 37, 72

Yiu P., Mixtilinear incircles, Amer. Math. Monthly, 106 (1999) 952-955

Ehrmann J.-P., Fwd (Darij Grinberg): New triangle center in connexion with an Iranian Math. Olympia, Iran 1997, Message Hyacinthos # 6115 (06/12/2004); http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6115

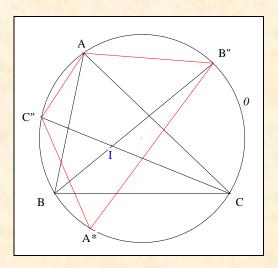


PROBLÈME 3

UN QUADRILATÈRE HARMONIQUE

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

le centre de ABC,

B", C" A* les seconds points d'intersection de (BI), (CI) avec 0

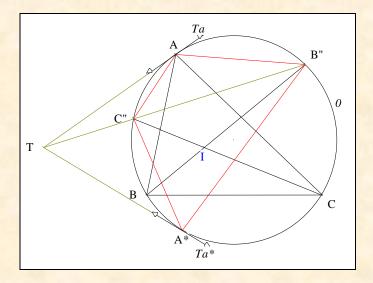
le A-point de De Longchamps de ABC. et

Donné: le quadrilatère AB"A*C" est harmonique.

Commentaire: une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. 12

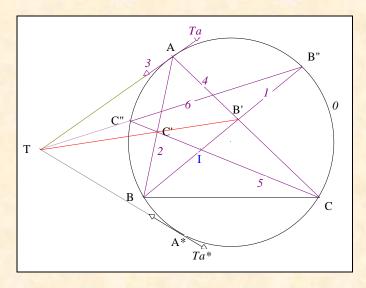
Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 39-41; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Scolies: (1) trois droites concourantes



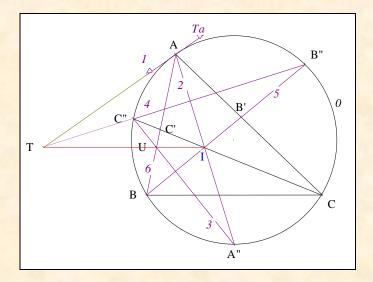
- Notons Ta, Ta^* les tangentes à 0 en A, A*.
- Conclusion: AB"A*C" étant harmonique, Ta, Ta* et (B''C'') sont concourants.
- Notons T ce point de concours.

(2) Une droite passant par T

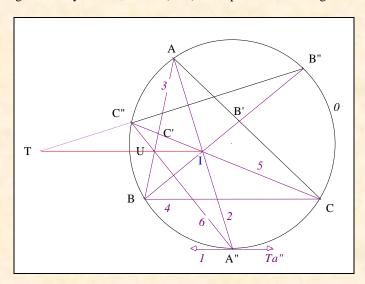


- Notons B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC), (CI) et (AB.
- D'après Colin MacLaurin-Pascal "Tetragramma mysticum", (C'B'T) est la pascale de l'hexagone dégénéré ABB'C''CA *Ta*.
- Conclusion: (B'C') passe par T.

(3) Une dernière droite passant par T 13



- A" le second point d'intersection de (AI) avec θ Notons le point d'intersection de (A"C") et (AB). U
- D'après Carnot "Pentagramma mysticum", (TIU) est la pascale de l'hexagone Ta A"C"B"BA.



- Notons Ta''la tangente à 0 en A".
- Ta" est parallèle à (BC). Scolie:
- D'après "Le résultat d'Aubert-Pascal" 14 appliqué l'hexagone cyclique Ta" ABCC"A"
- **(1)** (IU) en est la pascale
- **(2)** (IU) // (BC) ou encore (IUT) // (BC).
- Conclusion: (IU) passe par T et est parallèle à (BC).

¹³ Ayme J.-L., A parallel to BC, AoPS du 19/01/2015;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=621628
Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. 12; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



PROBLÈME 4 15

DEUX PERPENDICULAIRES

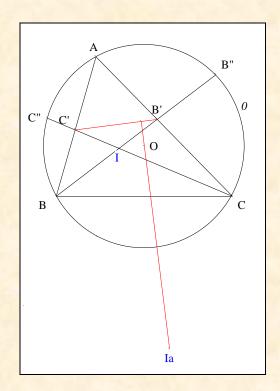
proposed

by

Darij Grinberg

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

O le centre de θ ,

Ia le A-excentre de ABC

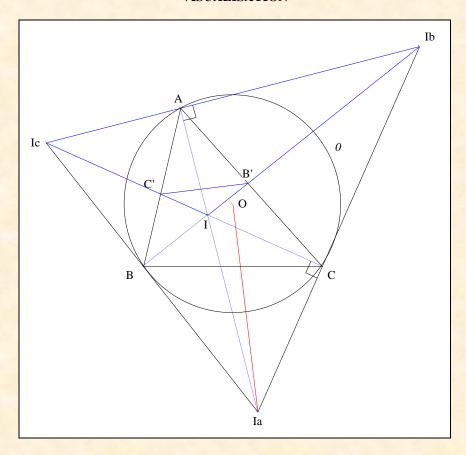
et B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC), (CI) et (AB).

Donné: (OIa) est perpendiculaire à (B'C').

-

Grinberg D., Incentral Triangle question, Message *Hyacinthos* # **6542** du 15/02/2003; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6542 2016 USAMO 3, Incenters, Excenters, and Feet, OH MY!, AoPS du 19/04/2016 https://artofproblemsolving.com/community/c5h1230491p6213572 Geometry lemma, AoPS du 09/10/2018; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1720231_geometry_lemma

VISUALISATION



• Notons I le centre de ABC,

et

- Ib, Ic les B, C-excentres de ABC
- 0 le cercle circonscrit de ABC.
- Scolies: (1) I est l'orthocentre du triangle excentral IaIbIc de ABC
 - (2) Ia est l'orthocentre du triangle IIbIc.
- D'après "Le théorème d'Hamilton", en conséquence, 0 est le cercle d'Euler de IIbIc; (OIa) est la droite d'Euler de IIbIc.
- Par définition, (1) ABC est le triangle orthique de IIbIc
 - (2) (B'C') est l'axe orthique de IIbIc.
- Conclusion: (OIa) est perpendiculaire à (B'C'). 16

_

Ayme J.-L., La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, G.G.G. vol. 1; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

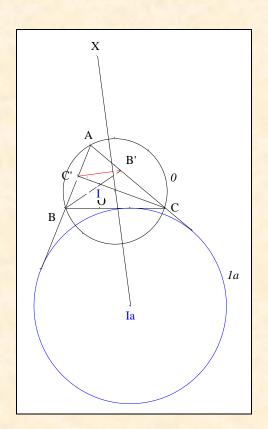


PROBLÈME 5 17

LA POLAIRE DE X

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

0, 1a les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,

O, Ia les centres resp. de 0, 1a,

I le centre de ABC,

B', C' les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,

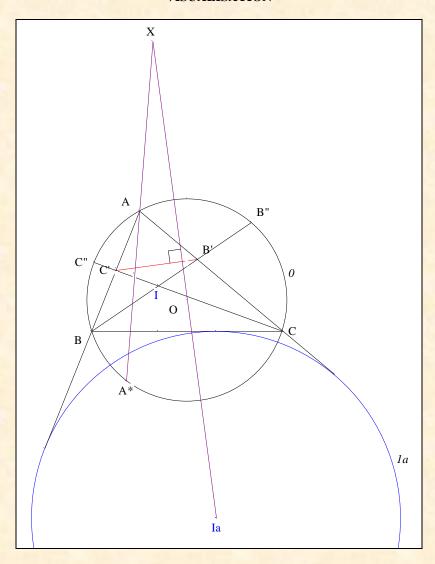
et X le centre externe d'homothétie de 0 et 1a.

Donné : (B'C') est la polaire de X relativement à θ .

_

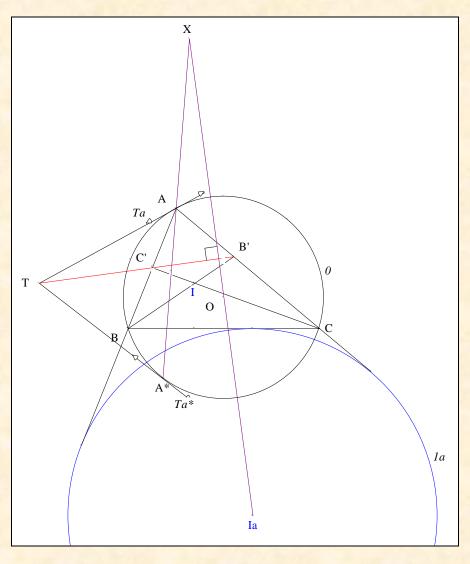
small lemma, AoPS du 25/09/2016; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1310593p7020620

VISUALISATION



- Notons A* le A-point de De Longchamps de ABC.
- D'après Problème 4, (OIa) est perpendiculaire à (B'C').
- D'après Problème 1, O, Ia et X sont alignés.
- D'après Philippe de La Hire 18, la polaire de X est parallèle à (B'C').
- D'après Problème 2, A*, A et X sont alignés.

Ayme J.-L., Réciprocité polaire, G.G.G. vol. 13, p. 2-3; http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/



- Notons et
- Ta, Ta*

les tangentes à 0 resp. en A, A* le point d'intersection de *Ta* et *Ta**.

• D'après Philippe de La Hire 19,

 (AA^*) est la polaire de T relativemnt à 0.

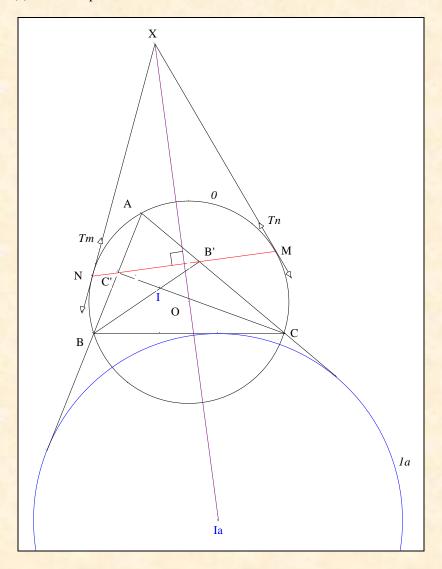
• D'après Problème 3 scolie 2,

- (B'C') passe par T.
- D'après Philippe de La Hire "Réciprocité polaire" 20,
- la polaire (AA*) de T passe par X si, la polaire de X passe par T. alors,
- Conclusion: (B'C') est la polaire de X relativement à 0.

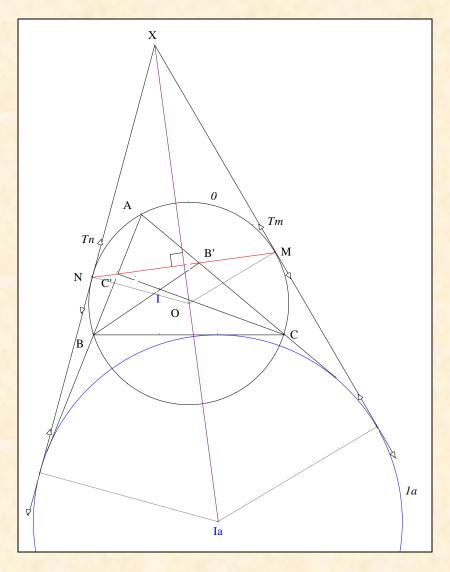
 $Ayme\ J.-L.,\ R\'{e}ciprocit\'{e}\ polaire,\ G.G.G.\ vol.\ \textbf{13},\ p.\ 2-3\ ;\ http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/}$ $Ayme\ J.-L.,\ R\'{e}ciprocit\'{e}\ polaire,\ G.G.G.\ vol.\ \textbf{13},\ p.\ 7-9\ ;\ http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/}$

²⁰

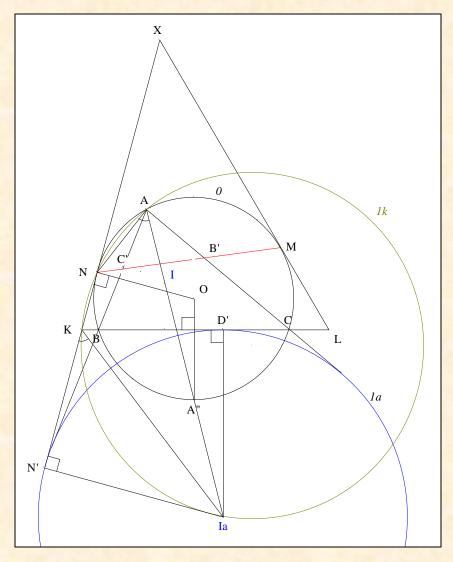
Scolies: (1) deux points de contact



- Notons M, N les seconds points d'intersection de (B'C') avec 0.
- Conclusion: (B'C') étant la polaire de X relativement à 0, (XM) et (XN) sont tangentes à 0 resp. en M, N.
 - (2) Deux tangentes communes extérieures



- Conclusion : X étant le centre externe d'homothétie de 0 et 1a, (XM) et (XN) sont les deux tangentes communes extérieures à 0 et 1a.
 - (3) Un cercle



• Notons A" le second point d'intersection de (AI) avec 0,

N' le point de contact de (AK) avec *Ia*

et K le point d'intersection de (XN) et (BC).

• Une chasse angulaire:

* par "Angles inscrit et au centre", <NAIa = ½ <NOA"

* par "Angles à côtés perpendiculaires", <NOA" = 180° - <D'KN

* par substitution, $\langle NAIa = 90^{\circ} - \frac{1}{2} \langle D'KN \rangle$

* par "Angles supplémentaires", <D'KN = <D'IaN'

* par substitution, $\langle NAIa = 90^{\circ} - \langle D'IaK \rangle$

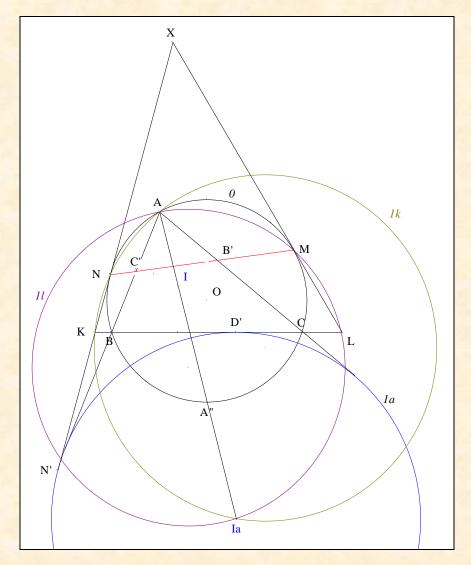
le triangle D'IaK étant D'-rectangle, <NAIa = <IaKD'

le triangle KD'N' étant K-isocèle, <IKD' = <N'KIa

* par substitution, <NAIa = <N'KIa.

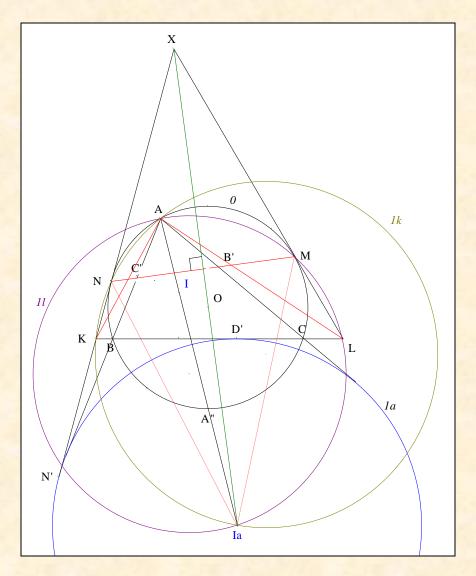
• Conclusion : A, N, K et Ia sont cocycliques.

- Notons 1k ce cercle.
 - (4) Le cercle gémellaire



- Notons L le point d'intersection de (XM) et (BC).
- Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que A, M, L et Ia sont cocycliques.
- Notons 11 ce cercle.
 - (5) Deux A-isogonales de ABC ²¹

Very hard, AoPS du 05/01/2011; https://artofproblemsolving.com/community/c6h385175



• Une chasse angulaire :

• Conclusion: par définition, (AK) et (AL) sont deux A-isogonale de ABC.



PROBLÈME 6 23

UN CERCLE INATTENDU
POUR
UN RÉSULTAT INATTENDU

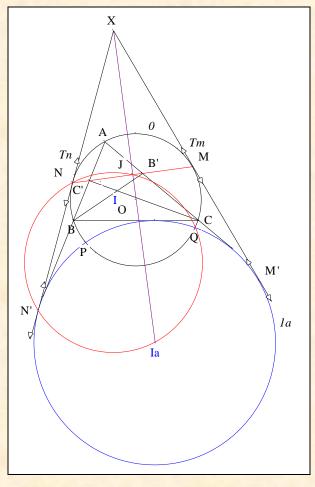
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

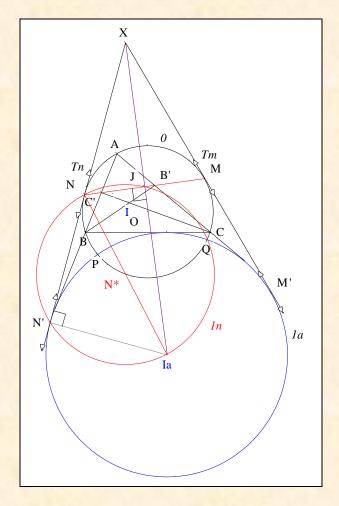
Figure:



Traits:	ABC	un triangle,
	0, 1a	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	O, Ia	les centres resp. de 0 , $1a$,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	X	le centre externe d'homothétie de 0 et 1a,
	M, N	les seconds points d'intersection de (B'C') avec θ ,
	M', N'	les points de contact de 1a resp. avec (XM), (XN),
	J	le point d'intersection de (XIa) et (MN),
et	P, Q	les points d'intersection de 1a et 0.

Donné : N, N', Ia, J et Q sont cocycliques.

VISUALISATION



• D'après Problème 1 et 4,

(IaJ) \perp (MN).

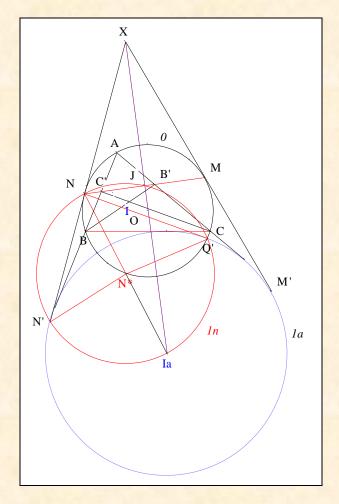
• Par définition d'une tangente,

 $(IaN') \perp (NN')$.

• D'après Thalès de Milet "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",

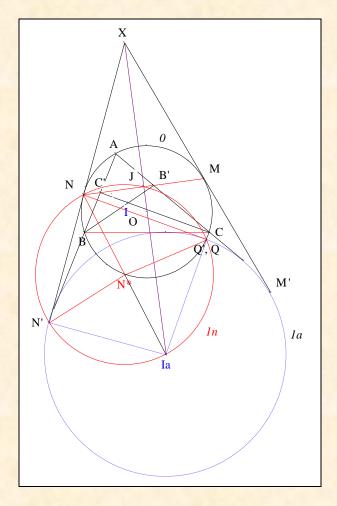
N, N', Ia et J sont cocycliques.

- Notons In ce cercle; il a pour diamètre [NIa]; et N* son centre.
- **Scolie**: N* est sur 0. 24



- Notons Q' le point d'intersection de *1n* avec 0. ²⁵
- Une chasse angulaire:
 - * le triangle N*NN' étant N*-isocèle, $\langle N*N'N = \langle N'NN* \rangle$
 - * par "Le théorème de la tangente", $\langle N'NN^* = \langle NQ'N^* \rangle$
 - * le triangle N*NQ' étant N*-isocèle, $\langle NQ'N^* = \langle N^*NQ' \rangle$
- N*NN' et N*NQ' étant symétiques par rapport à (NN*Ia), IaQ' = IaN' ; en conséquence, In passe par Q'.

_



- Par symétrie d'axe (IaN*N),
- IaN' = IaQ';

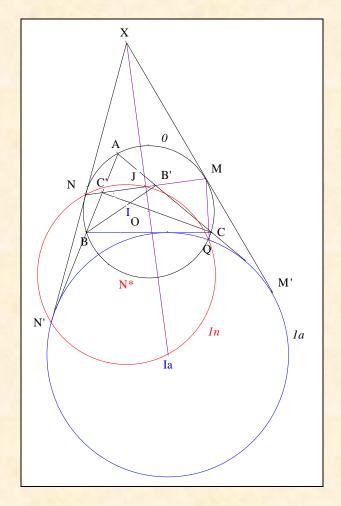
en conséquences,

- (1) *la* passe par Q'
- (2) Q' et Q sont confondus
- (3) ln passe par Q.
- Conclusion: N, N', Ia, J et Q sont cocycliques.

Scolie:

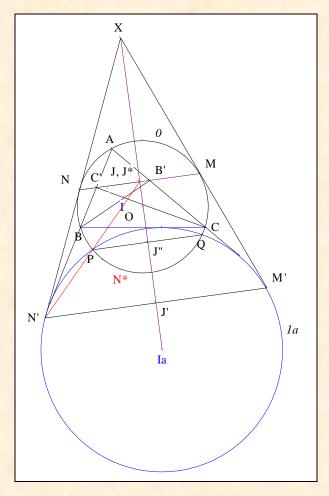
(1) le résultat inattendu ou deux segments égaux ²⁶

Ayme J.-L., A relation, AoPS du 22/09/2018; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1711324_a_relation



- Conclusion : d'après "Cercle passant par le centre d'un cercle" 27 appliqué à 0 et 1n, MJ = MQ.
 - **(2)** Un résultat intermédiaire ou trois points alignés 28

 $Ayme\ J.-L.,\ Simplicity\ \textbf{I},\ G.G.G.\ vol.\ \textbf{36},\ p.\ 11-12\ ;\ http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/$ $Ayme\ J.-L.,\ Through\ a\ midpoint,\ AoPS\ du\ 22/09/2018\ ;\ https://artofproblemsolving.com/community/c6h1711319_through_a_midpoint$



- Notons
 J', J" les points d'intersection de (IaX) resp. avec (M'N'), (PQ)
 et J* le point d'intersection de (N'P) et (IaX).
- (PQ) étant l'axe médian ²⁹ de la bande de frontières (MN) et (M'N'), J" est le milieu de [JJ'].
- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux" appliqué au triangle J*N'J',
 J* et J sont confondus.
- Conclusion: N', P et J sont alignés.

-

Ayme J.-L., A propos de deux cercles sécants, G.G.G. vol. 12, p. 70-71; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



PROBLÈME 7 30

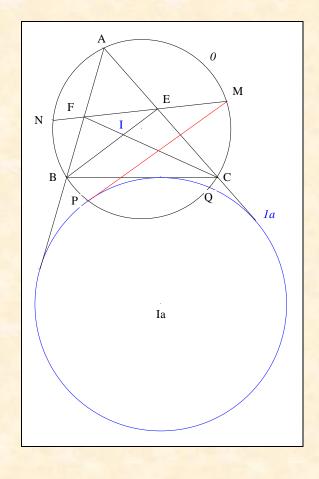
UNE TANGENTE

PAR

UNE APPROCHE SYNTHÉTIQUE

VISION

Figure:



ABC Traits: un triangle,

0, 1a les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,

O, Ia les centres resp. de 0, 1a,

P, Q les points d'intersection de 1a avec 0,

le centre de ABC,

B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC), (CI) et (AB),

M, N les points d'intersection de (MN) avec θ . et

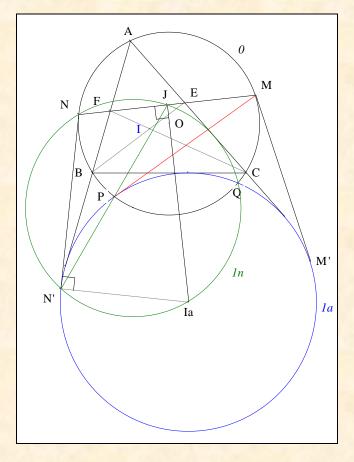
Donné: (MP) est tangente à 1a en P.

30

Interesting problem about excircle, AoPS du 30/04/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=587722 Ayme J.-L., Tangent to the A-excercle, AoPS du 20/09/2018;

https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710320_a_tangent_to_the_aexcircle

VISUALISATION



Notons M', N' les points de contact de 1a avec les tangentes communes extérieures à 0 et 1a, le point d'intersection de (IaO) et (MN),
 et 1n le cercle de diamètre [IaN] ; il passe par N' et J.

• D'après Problème **6**, *1n* passe par Q.

- D'après Problème 6, scolie 2, N', P et J sont alignés.
- Conclusion : d'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" ³¹ appliqué au triangle MJN' et à 0, 1n, 1a concourants en Q, (MP) est tangente à 1a en P.

Ayme J.-L., Auguste Miquel G.G.G. vol. 13, p. 4-7; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



PROBLÈME 8 32

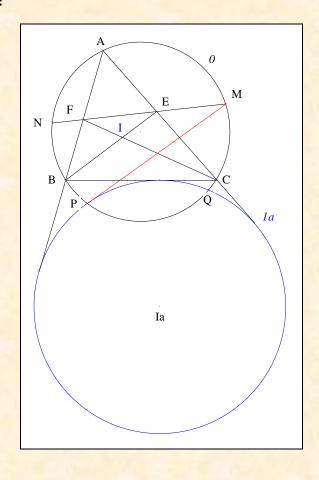
UNE TANGENTE

PAR

UNE APPROCHE MÉTRIQUE

VISION

Figure:



Traits: **ABC** un triangle,

> 0, 1a les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,

O, Ia les centres resp. de 0, 1a,

P, Q les points d'intersection de 1a avec 0,

le centre de ABC,

B', C' les points d'intersection resp. de (BI) et (AC), (CI) et (AB),

M, N les points d'intersection de (MN) avec θ . et

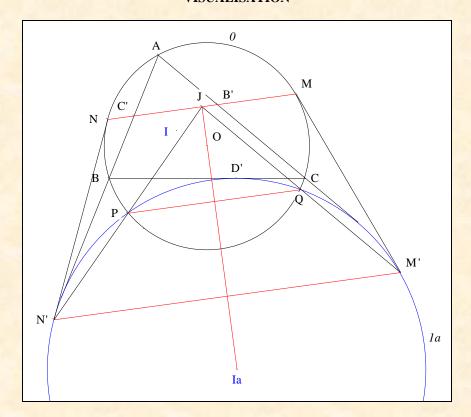
(MP) est tangente à 1a en P. Donné:

Interesting problem about excircle, AoPS du 30/04/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=587722 Ayme J.-L., Tangent to the A-excercle, AoPS du 20/09/2018;

https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710320_a_tangent_to_the_aexcircle

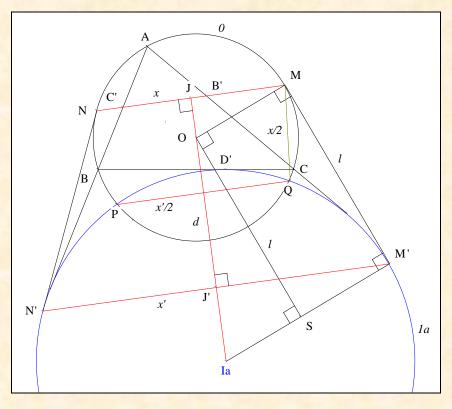
³²

VISUALISATION



- Notons M', N' les points de contact de 1a avec les tangentes communes extérieures à 0 et 1a, le point d'intersection de (IaO) et (MN),
 R, Ra les longueurs resp. de [OIa], [MM'].
- D'après Euler "Une formule" 33 , $d^2 = R^2 + 2.RRa$.
- Scolies: (1) (MN), (PQ) et (M'N') sont parallèles entre elles
 - (2) (PQ) est la droite des milieux de triangle JM'N'
 - (3) M'N' = 2.PQ.

F.-G.M., Exercices de Géométrie, Problème 629, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) 831 Johnson R. A., Modern Geometry, Houghton Mifflin, Boston, 1929, p. 187

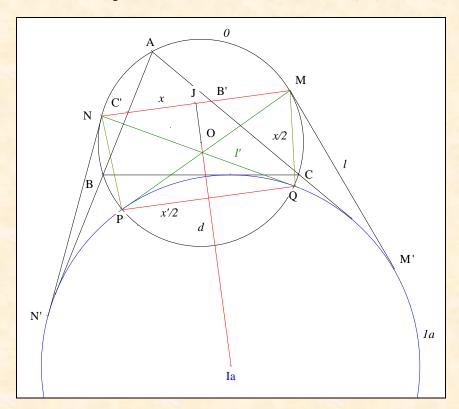


• Notons J, J' les points d'intersection de (OIa) resp. avec (MN), M'N') et x, x' les longueurs resp. de [MN], [M'N'].

• Scolie: J et J' sont resp. les milieux de [MN], [M'N'].

• Nous avons: (1) les triangles JOM et SIaO étant semblables, (x/2)/R = 1/d i.e. x = 2R1/d

(2) les triangles J'IaM' et SIaO étant semblables, (x'/2)/Ra = 1/d i.e. x' = 2Ral/d.



• Notons l' la longueur de [MP].

• Le trapèze MNPQ étant un trapèze isocèle,

 D'après Claude Ptolémée "Le théorème" appliqué à MNPQ,

par substitution,

par simplification,

i.e.

en conséquence,

• Conclusion: d'après Euclide d'Alexandrie 34,

MQ = NP et MP = NQ.

MP.NQ = MQ.NP + MN.PQ

 $1'^2 = (x/2)^2 + x.(x'/2)$

 $l^{2} = (Rl/d)^{2} + (2.Rl/d).(Ral/d)$

 $(1'/1)^2 = (R^2 + 2.RRa)/d^2$

 $(1'/1)^2 = 1$

l' et l sont égaux.

(MP) est tangente à 1a en P.

Conséquence de la proposition 36 du Livre III des Éléments d'Euclide.

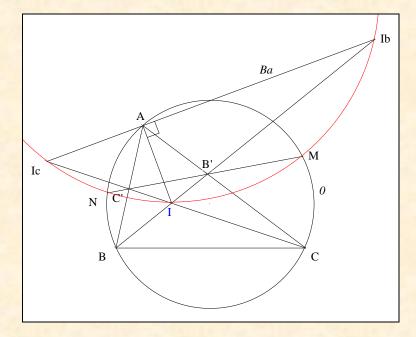


PROBLÈME 9 35

CINQ POINTS COCYCLIQUES

VISION

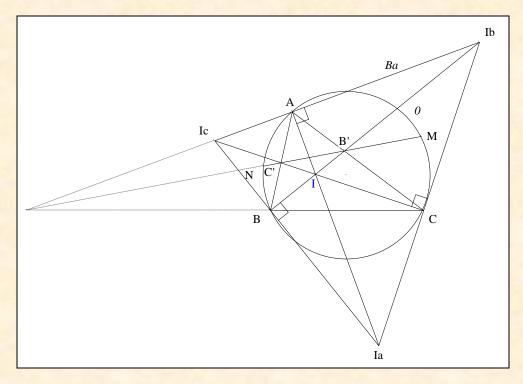
Figure:



Traits:	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqué sur la figure,
	Ba	la A-bissectrice extérieure de ABC
et	Ib, Ic	les points d'intersection de Ba resp. avec (BI), (CI).

Donné : Ib, Ic, M, N et I sont cocycliques.

VISUALISATION



• Scolie: Ib, Ic sont resp. les B, C-excentres de ABC.

• Notons Ia le A-excentre de ABC.

• Scolies: (1) IaIbIc est le triangle excentral de ABC

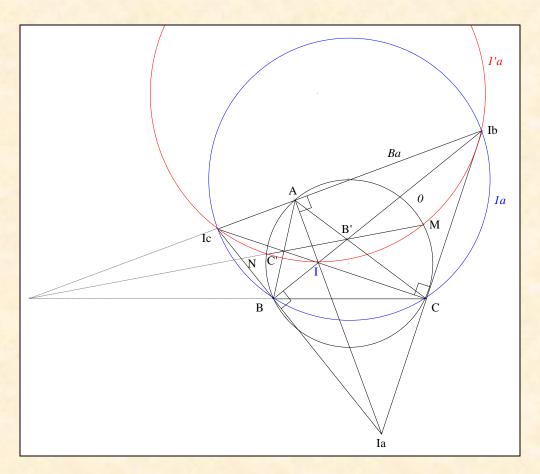
(2) I est l'orthocentre de IaIbIc

(3) 0 est le cercle d'Euler de IaIbIc.

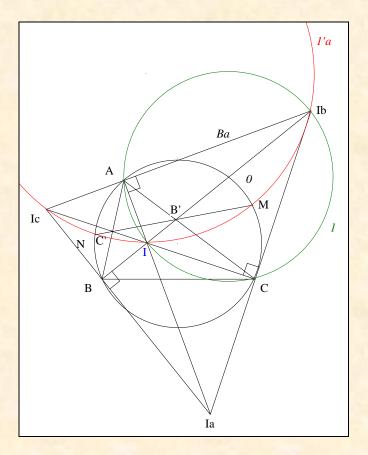
D'après Girard Desargues "Le théorème des deux triangles" ³⁶
 (AIIa) étant l'arguésienne des triangles BC'Ic et CB'Ib, (BC), (C'B') et (IcIb) sont concourantes.

-

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 7, p. 40-42; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons *la* le cercle de diamètre [IbIc] ; il passe par B et C.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ³⁷, Ib, Ic, M et N sont cocycliques.
- Notons 1'a ce cercle.



- Notons 1 le B-cercle de Mention de ABC; il passé par A, I, C et Ib.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" 38 appliqué aux cercles 0, 1 et 1'a, 1'a passe par I.
- Conclusion: Ib, Ic, M, N et I sont cocycliques.

Scolies: (1) le rayon de $l'a^{-39}$

ARO 2006

final round grade 11 first day problem 4

_

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

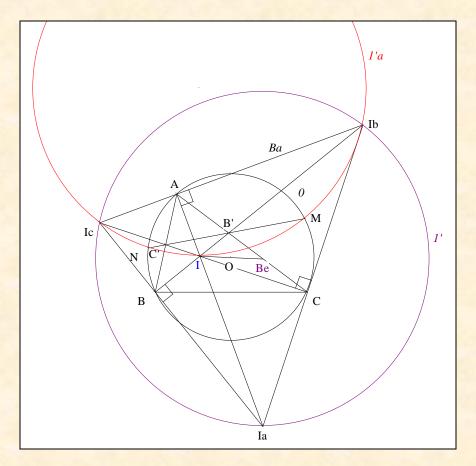
^{2*}R=r', AoPS du 21/08/2009; https://artofproblemsolving.com/community/c6h296809

Circle of Double Radius, *Mathlinks* du 13/04/2011; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=406369

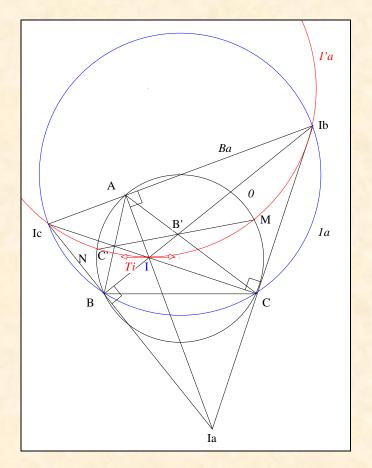
difficult problem, AoPS du 14/06/2012; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=483886

easy problem, AoPS du 07/03/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=579505

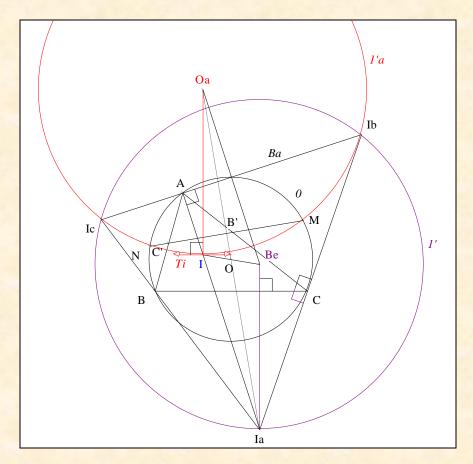
Nice Geometry, AoPS du 23/04/2016;



- Notons
 O le centre de 0,
 R le rayon de 0,
 I' le cercle de Bevan de ABC,
 Be le centre de 1'
 et R' le rayon de 1'.
- D'après Lazare Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", *1'a* est le symétrique de *1'* par rapport à (IbIc).
- Par culture géométrique, O étant le milieu de [IBe] ⁴⁰, R' = 2.R.
- Conclusion : les rayons de 1'a et 1' sont égaux.
 - (2) La tangente à *l'a* en I



- Notons Ti la tangente à 1a en I.
- Les cercles l'a et la, les points de base Ib et Ic, les moniennes (IIbB) et (IIcC), conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que Ti // (BC).
- Conclusion : *Ti* est parallèle à (BC).
 - (3) Le centre de 1'a



• Notons O'a le centre de 1'a,

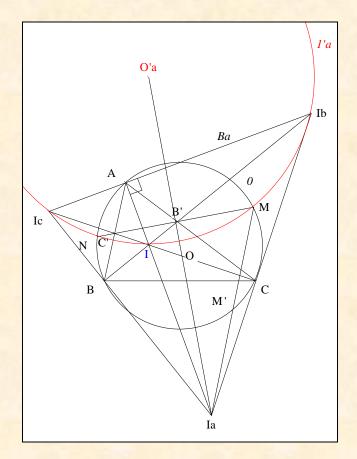
• Par définition d'une tangente, d'après scolie 2, Ti // (BC); par culture géométrique, en conséquence, $(OaI) \perp Ti$; Ti // (BC); $(BC) \perp (BeIa)$;

• D'après scolie 1, OaI = BeIa.

- Conclusion : le quadrilatère OaIIaBe étant un parallélogramme, O est le milieu de [OaIa].
 - (4) Un milieu remarquable 41

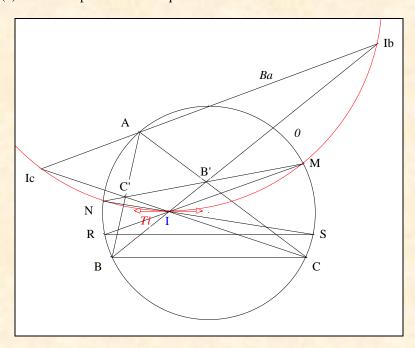
.

Ayme J.-L., A nice midpoint, AoPS du 20/09/2018; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1710309_a_nice_midpoint



- Notons M' le second point d'intersection de (MIa) avec 0.
- Conclusion : 0 étant l'homothétique de 1'a (centre Ia, rapport 2), M' est le milieu de [IaM].

(5) Deux parallèles remarquables



- Notons R, S les seconds points d'intersection de 0 resp. avec (MI), (NI).
- Les cercles l'a et 0, les points de base M et N, les moniennes (MIR) et (NIS), conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que Ti // (RS).

• Conclusion: *Ti*, (RS) et (BC) sont parallèles entre elles.



PROBLÈME 10 42

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

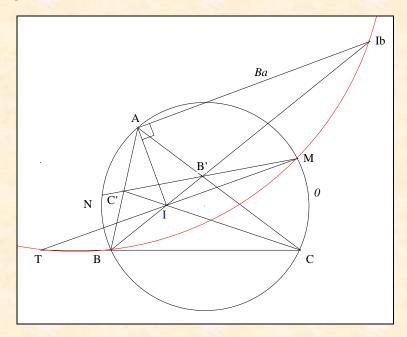
Proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

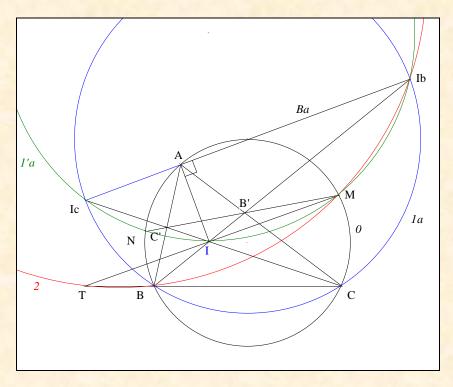
Figure:



Traits:	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqué sur la figure,
	Ва	la A-bissectrice extérieure de ABC,
	Ib	le point d'intersection de Ba avec (BI)
	et T	le point d'intersection de (IM) et (BC).

Donné: T, B, M et Ib sont cocycliques.

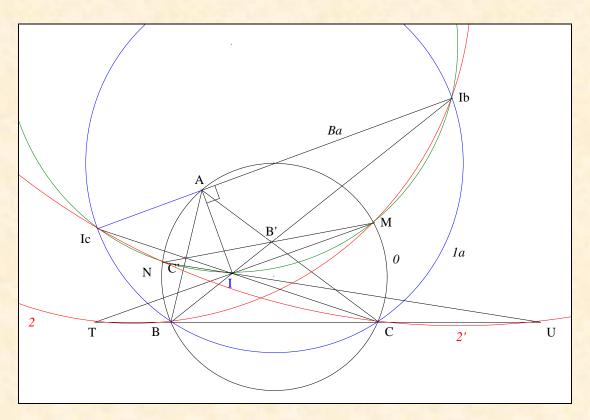
VISUALISATION



- Notons Ic le point d'intersection de *Ba* avec (CI).
- D'après Problème 9, Ib, Ic, M, N et I sont cocycliques.
- Notons 1'a ce cercle,
 - le cercle de diamètre [IbIc] ; il passe par B et C ;
 - et 2 le cercle circonscrit au triangle CTI.
- D'après Auguste Miquel "Le théorème du pivot" ⁴³ appliqué à CTI avec B sur (CT), M sur (TI) et Ic sur (IC), 2, 1'a et 1a concourent en Ib
- Conclusion: T, B, M et Ib sont cocycliques.

Scolies: (1) un cercle gémellaire

Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons U le point d'intersection de (IN) et (BC).
- Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que U, C, N et Ic sont cocycliques.
- Notons 2' ce cercle.



PROBLÈME 11 44

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

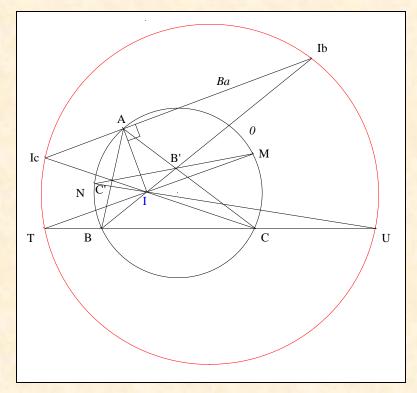
Proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

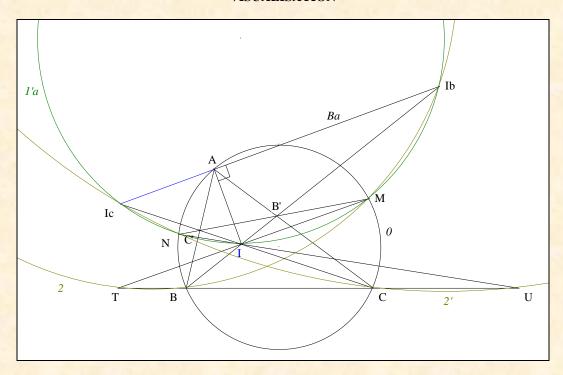
Figure:



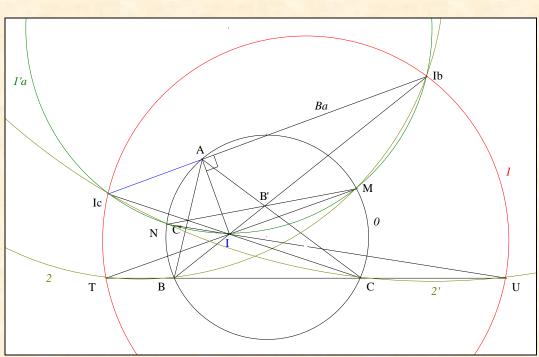
Traits:	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqué sur la figure,
	Ва	la A-bissectrice extérieure de ABC,
	Ib, Ic	les B, C-excentres de ABC,
et	T, U	les points d'intersection de (BC) resp. avec (IM), (IN).

Donné : T, Ic, Ib et U sont cocycliques.

VISUALISATION

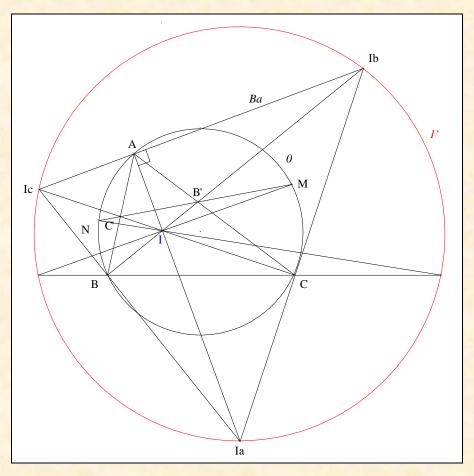


- D'après Problème 9,
- Ib, Ic, M, N et I sont cocycliques.
- Notons 1'a ce cercle
- D'après Problème 10,
- T, B, M et Ib sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle.
- D'après Problème 10, scolie,
- U, C, N et Ic sont cocycliques.
- Notons 2' ce cercle.



- Conclusion : d'après Henri Léon Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" 45, appliqué aux cercles 2, 0, 2' et 1'a T, Ic, Ib et U sont cocycliques.
- Notons 1 ce cercle.

Scolies: (1) l est le cercle de Bevan de ABC 46



- Notons Ia le A-excentre de ABC et 1' le cercle de Bevan de ABC.
- Nous savons : * ABC est le triangle orthique de IaIbIc
 - * 0 est le cercle d'Euler de IaIbIc
 - * par culture géométrique, IIa.IA = IIb.IB = IIc.IC
 - * 1' est l'inverse de 0 relativement au pôle I.

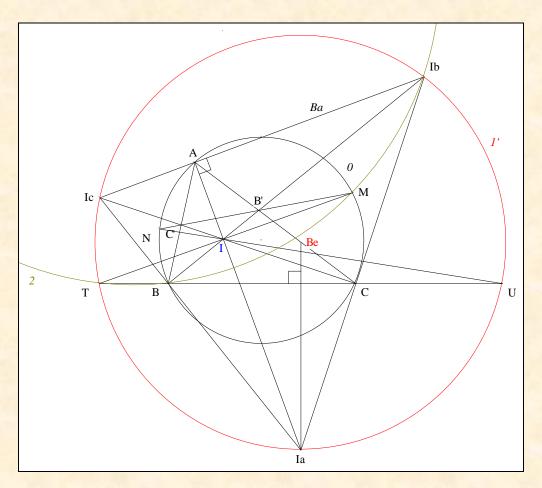
Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916);

http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, vol. 2, p. 9-11; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

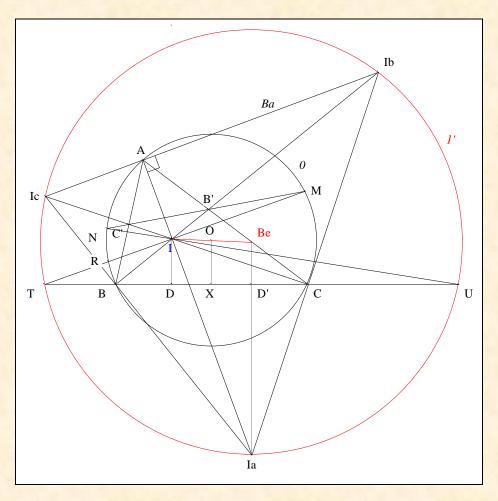
Ayme J.-L., A point on the Bevan's circle, AoPS du 12/01/2017;

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1367309_a_point_on_the_bevans_circle



- Relativement à 2,
- Conclusion partielle:
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
- Conclusion: 1 et 1' étant confondus,
- Notons Be le centre de 1.

- IIb.IB = IM.IT;
- T est sur 1'.
- U est sur 1'.
- 1 est le cercle de Bevan de ABC.
- (2) Le point de contact du A-excercle de ABC



- Notons
- O le centre de 0,
- le milieu de [BC]
- X et
 - D, D' les points de contact des cercles inscrit, A-exinscrit de ABC avec (BC).
- D'après Benjamin Bevan 47, Ia, D' et Be sont alignés.
- D' est le milieu de [TU]. 48 • Conclusion:
 - (3) Ia et D' sont sur la médiatrice de [TU]
 - **(4)** Un milieu 49
- le second point d'intersection de (MI) avec 0. Notons R
- Conclusion: O étant le milieu de [IBe], R est le milieu de [IT].

Bevan B., Mathematical Repository de Leybourn I (1804) 18

Ayme J.-L., Cinq theorems de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 17-25; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/ 48 Ayme J.-L., A nice midpoint, AoPS du 10/01/2017;

 $http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1366432_a_nice_midpoint$

Ayme J.-L., Another nice midpoint, AoPS du 10/01/2017; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1366447_another_nice_midpoint



PROBLÈME 12 50

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

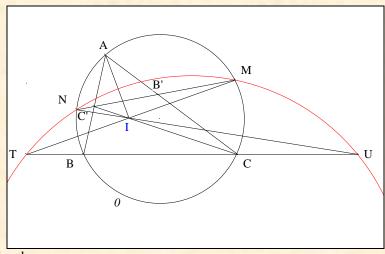
Proposed

By

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure:

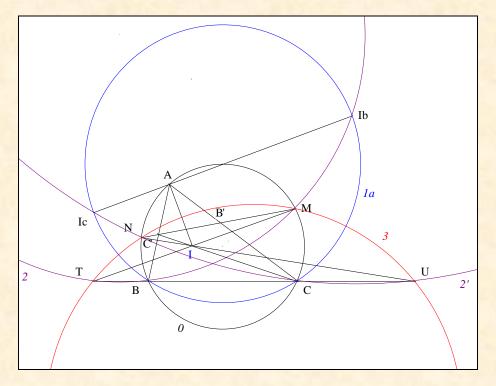


Traits:	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqué sur la figure,
	Ba	la A-bissectrice extérieure de ABC
et	T, U	les points d'intersection de (BC) resp. avec (IM), (IN).

Donné: T, N, M et U sont cocycliques.

VISUALISATION

Ayme J.-L., Another concyclic, AoPS du 13/01/2017; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1367698_another_concyclic

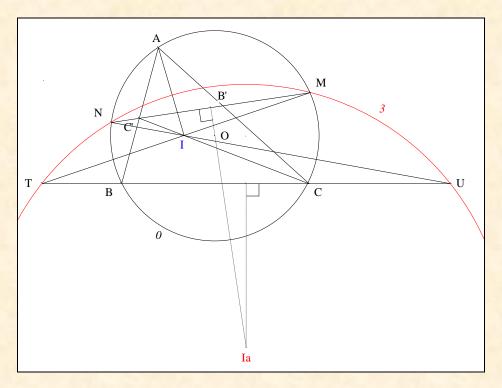


- Notons Ia, Ib les B, C-excentre de ABC,
- D'après Problème 10, T, B, M et Ib sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle.
- D'après Problème 10. scolie, U, C, N et Ic sont cocycliques.
- Notons
 et
 1a
 ce cercle
 le cercle de diamètre [IbIc]; il passe par B et C.
- Conclusion : d'après Henri Léon Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" 51, appliqué aux cercles 2, 0, 2' et 1a, T, N, M et U sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.

Scolies: (1) le centre de 3

Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, Nouvelles Annales de Mathématiques (1916); http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

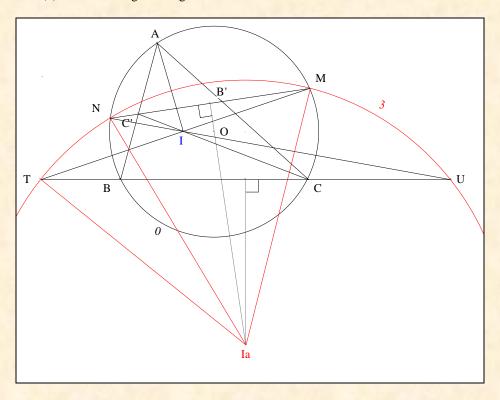
Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, vol. 2, p. 9-11; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



• D'après Problème **5** et **12**, scolie **3**, le centre de *3* est le point d'intersection des médiatrice de [MN] et [TU].

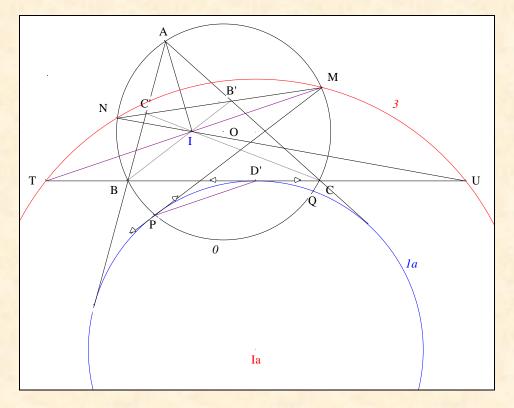
• Conclusion : Ia est le centre de 3.

(2) Trois segments égaux



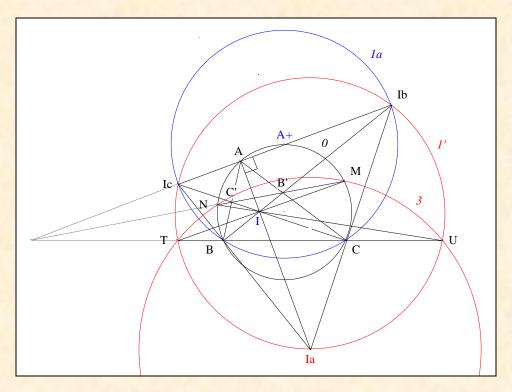
• Conclusion : IaT = IaM = IaN.

(4) Des parallèles 52



- Notons *la* le A-excercle de ABC,
 - D' le point de contact de *la* avec (BC)
 - et P, Q les points d'intersection de 1a avec 0.
- D'après Problème 8,

- (PM) est tangente à 1a en P.
- Conclusion: les cercles 1a et 3 étant concentriques,
- (PD') // (MIT).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
- (QD') // (NIU).
- (5) Trois droites concourantes



- Nous savons que
- * T, N, M et U sont cocycliques
- * Ic, B, C, Ib sont cocycliques
- D'après Problème 11,
- Ic, T, U et Ib sont cocycliques.
- Conclusion : d'après Monge "Le théorème des trois cordes" 53, (IbIc), (MN) et (BC) sont concourantes.

-

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



PROBLÈME 13 54

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

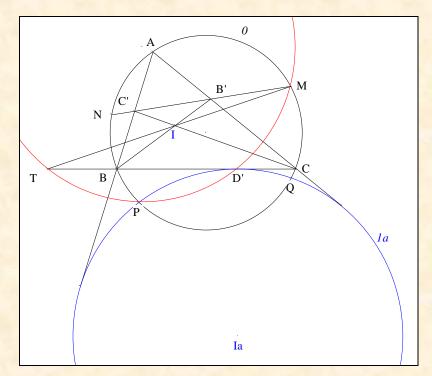
Proposed

Ву

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



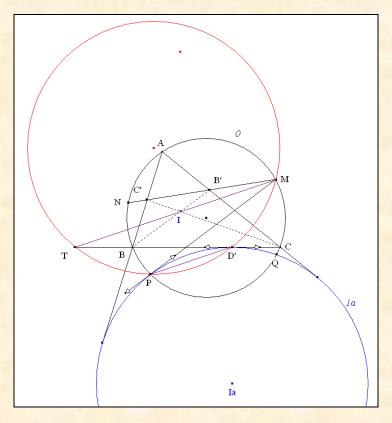
Traits:	ABC	un triangle,
	I, Ia	les centre, A-excentre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,
	0, 1a	les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC,
	D'	le point de contact de 1a avec (BC),
	P, Q	les points d'intersection de 1a avec 0,
	M, N	les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqués sur la figure
et	T	le point d'intersection de (BC) et (IM).

Donné : P, D', M et T sont cocycliques.

⁻

Ayme J.-L., Another circle, AoPS du /01/2017; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1370896_another_circle

VISUALISATION



- D'après Problème 8,
- (PM) est tangente à 1a en P.
- D'après Problème 12,
- (PD') // (MIT).
- Conclusion: le cercle 1a, les points de base P et D', les moniennes naissantes (PPM) et (D'D'T), les parallèles (PD') et (MIT), conduisent au théorème 4'' de Reim; en conséquence, P, D', M et T sont cocycliques.



PROBLÈME 14 55

INTERSECTION

SUR

LE CERCLE CIRCONSCRIT

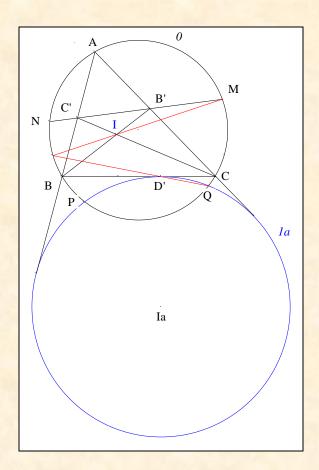
Proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure:



Prove intersection of PJ,NH lies in the nine-point circle, AoPS du 21/09/2018; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1710881p11043832

Ayme J.-L., Intersection on the circumcircle, AoPS du 25/09/2018; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1712817_intersection_on_the_circumcircle

Traits: ABC un triangle,

I, Ia les centre, A-excentre de ABC,

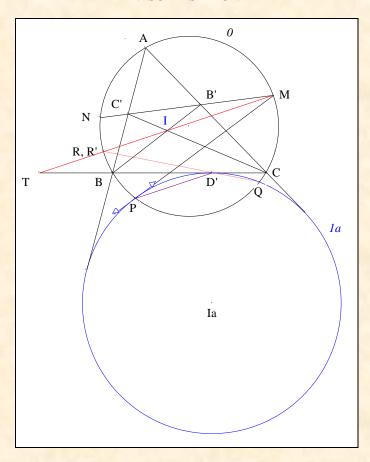
B', C' les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC,

0, 1a les cercles circonscrit, A-exinscrit à ABC, D' le point de contact de 1a avec (BC), P, Q les points d'intersection de 1a avec 0,

et M, N les points d'intersection de (B'C') avec 0 comme indiqués sur la figure

Donné : (MI) et (D'Q) se coupent sur θ .

VISUALISATION



• Notons T le point d'intersection de (MI) et (BC),

et R, R' les seconds points d'intersection de 0 resp. avec (MI), (QD').

• D'après Problème 8, (PM) est tangente à 1a en P.

• D'après Problème 12, (MIRT) // (PD').

• Les cercles 1a et 0, les points de base P et Q, les monienne (PPM) et (D'QR'),

conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que (PD') // (MR').

Par transitivité de //,
d'après le postulat d'Euclide,
en conséquence,
 R' et R sont confondus.
 (MR) // (MR');
 (MR) = (MR');

• Conclusion: (MI) et (DQ') se coupent sur θ .