Pr. Cabri 892

Enunciado

Los lados de un triángulo no obtusángulo miden a,b,c y su circunradio R
Demostrar que (ab/c)+(bc/a)+(ca/b) > =5R.
Doledenok, A. y otros (2016): El método p-q-r. (problema 73).
Propuesto por César Beade Franco

Solución de César Beade Franco

Comentario

El método PQR parece estar concebido para resolver desigualdades simétricas con varias (especialmente 3) incógnitas (a, b, c, en general ≥ 0). Se basa en el cambio de variables, siempre posible para expresiones simétricas, p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc, que mantienen la propiedad de seguir siendo ≥ 0. Frecuentemente la desigualdad resultante tras el cambio basta comprobarla para valores extremos de alguna de las variables. Una vez justificado ésto, el Th. PQR, (o los PQR-lemas, que es lo mismo) nos dice que estos valores extremos se alcanzan si son iguales un par de variables (o una nula, en caso de r). Esto permite eliminar una variable y simplificar la expresión.
Este método es reciente. Creo que el artículo fundacional data de 2005 (en vietnamita) y conozco solo una media docena de artículos sobre el mismo. Se usa en la solución del problema 318 de la gaceta de la RSME, donde lo descubrí.
Una demostración de los PQR-lemas se halla en el artículo citado. También se encuentra, junto con un algoritmo para el cambio de variables, en "The pqr-method", de S. Chow y otros.

■ **Solución**

Si S es la superficie del triángulo sabemos que $R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$.

La desigualdad anterior queda $\frac{a^2 b^2+a^2 c^2+b^2 c^2}{abc}\geq\frac{5\,abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$ (*).

Expresada en términos PQR queda $\frac{q^2-2pr}{r}\geq\frac{5r}{\sqrt{p(-p^3+4pq-8r)}}$.

Si fijamos p y r bastaría comprobar la desigualdad para el menor valor de q (al aumentar q, el primer miembro crece y el segundo disminuye, agrandándose ésta). Aplicando el q-lema éste valor se alcanza para a=b. Operando, la desigualdad (*) se transforma en

$\left(a^2 b^2+a^2 c^2+b^2 c^2\right)^2 (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) - 25\,a^4 b^4 c^4 \geq 0$

que haciendo a=b obtenemos

$2\,a^4 c^2 \left(2\,a^2-c^2\right)\left(a^4-2\,a^2 c^2+2\,c^4\right)\geq 0$,

cierto pues como el triángulo no puede ser obtusángulo $c \leq a\sqrt{2}$.

La igualdad se da para $(a, a, a\sqrt{2})$.