

Propuesto por César Beade Franco.

Problema 892

Los lados de un triángulo no obtusángulo miden a, b, c y su circunradio R .

Demostrar que:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 5R.$$

Doledenok, A. y otros (2016): *El método p-q-r. (Problema 73)*

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 5R$$

$$S = S[ABC] = \frac{abc}{4R}; S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 5R \rightarrow \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} \geq 5 \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

Ahora bien,

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -a^3 + a^2b + ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + ac^2 + bc^2 - c^3$$

Expresamos todo en función de $p = a+b+c; q = ab+bc+ca; r = abc$.

Como quiera que:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = p(p^2 - 3q) + 3r$$

$$a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) = pq - 3r$$

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -p(p^2 - 3q) - 3r + pq - 3r - 2r = -p^3 + 4pq - 8r$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -p^4 + 4p^2q - 8pr$$

En definitiva,

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 5R \rightarrow \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} \geq 5 \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$\frac{q^2 - 2pr}{r} \geq \frac{5r}{\sqrt{-p^4 + 4p^2q - 8pr}} \rightarrow \frac{(q^2 - 2pr)\sqrt{-p^4 + 4p^2q - 8pr}}{r^2} \geq 5$$

Fijando los valores de p y r , resulta que la expresión de la izquierda alcanzará su valor extremo (Mínimo) si y sólo si dos de los lados $\{a, b, c\}$ del triángulo son iguales. Para ello, sea $a = b = 1; c = x$.

Observamos que, de este modo, el triángulo ABC es isósceles, siendo además de entre todos los triángulos no obtusángulos, el rectángulo el que posee el mayor valor para el tercer lado $c = x = \sqrt{2}$.

Entonces,

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De esta forma, tenemos que en efecto, esta tripleta de valores $\{a = b = 1, c = \sqrt{2}\}$ satisface la igualdad asociada a la inecuación:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = 5R \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Operando, tenemos:

$$\frac{1}{x} + 2x \geq \frac{5x}{\sqrt{(2+x)x^2(2-x)}} \rightarrow \frac{1}{x} + 2x \geq \frac{5}{\sqrt{(2+x)(2-x)}} \rightarrow \frac{(2x^2+1)\sqrt{(2+x)(2-x)}}{x} \geq 5$$

Por tanto, por dicho q-Lema, tenemos ahora que hallar el valor extremo de la expresión de la izquierda.

En principio,

$$f(x) = \frac{(2x^2+1)\sqrt{(2+x)(2-x)}}{x}$$

está definida en $]0,2[$.

Ahora bien, como el triángulo es no obtusángulo, entonces $x \in]0, \sqrt{2}]$ y como:

$$f'(x) = -\frac{4(-1+x^2)^2}{x^2\sqrt{4-x^2}} \leq 0,$$

entonces es decreciente en todo su dominio y el mínimo valor lo alcanzará en $x = \sqrt{2}$.

Como $f(\sqrt{2}) = 5 \rightarrow f(x) \geq 5, x \in]0, \sqrt{2}]$.

En definitiva, se verifica

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 5R$$