

Propuesto por César Beade Franco

Los lados de un triángulo no obtusángulo miden a, b, c y su circunradio R

Demostrar que $(ab/c) + (bc/a) + (ca/b) \geq 5R$.

Doledenok, A. y otros (2016): [El método p-q-r](#). (problema 73)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

L'inégalité (I) $= (ab/c) + (bc/a) + (ca/b) \geq 5R$ peut s'écrire $ab/cR + bc/aR + ca/bR \geq 5$

On opère le changement de variables suivant: $x + y = cR/ab$, $y + z = aR/bc$ et $z + x = bR/ca$

On en déduit $x - z = (c^2 - a^2)R/abc$, $y - x = (a^2 - b^2)R/abc$ et $z - y = (a^2 - b^2)R/abc$,

D'où $x = (-a^2 + b^2 + c^2)R/2abc$, $y = (a^2 - b^2 + c^2)R/2abc$ et $z = (a^2 + b^2 - c^2)R/2abc$.

1er cas : ABC est rectangle.

Sans perte de généralité, on retient $a^2 = b^2 + c^2$. a est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant b et c pour cathètes.

Dès lors $x = 0$, $R = a/2$, $y = c/2b$, $z = b/2c$, $yz = 1/4$ avec $y + z = (b^2 + c^2)/2bc \geq 1$ quels que soient b et c .

L'inégalité (I) s'écrit $1/y + 1/z + 1/(y + z) \geq 5$. On pose $u = y + z$ et (I) devient $4u^2 - 5u + 1 = (4u - 1)(u - 1) \geq 0$, inégalité qui est bien vérifiée avec $u \geq 1$.

2ème cas : ABC est acutangle

Comme le triangle ABC est acutangle, on a $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ et $c^2 < a^2 + b^2$ et les trois termes x, y et z sont > 0 .

L'inégalité (I) s'écrit alors $1/(x+y) + 1/(y+z) + 1/(z+x) \geq 5$

On pose $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ et $r = xyz$.

On a la relation $q = [(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2) + (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)]R^2/4a^2b^2c^2$

On sait que $R/abc = 1/4\Delta$ avec $\Delta =$ aire du triangle ABC

Par ailleurs $16\Delta^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.

Après développement de l'expression de q , il en résulte que $q = 1/4$.

En multipliant les deux membres de (I) par $(x+y)(y+z)(z+x) > 0$, on obtient :

$(y+z)(z+x) + (x+y)(z+x) + (x+y)(y+z) \geq 5(x+y)(y+z)(z+x)$

Or $(y+z)(z+x) + (x+y)(z+x) + (x+y)(y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3/4 = (x + y + z)^2 - 2q + 3/4 = p^2 + 1/4$

D'autre part $(x+y)(y+z)(z+x) = (y^2 + 1/4)(z + x) = y(1/4 - xz) + (z + x)/4 = p/4 - r$

L'inégalité (I) se ramène donc à: $p^2 + 1/4 \geq 5p/4 - 5r$ sous la contrainte $q = 1/4$.

D'après la méthode pqr décrite dans l'article ci-dessus référencé de A. Doledenok & alii, nous supposons admis le lemme suivant (en anglais):

r-lemma. Fix some values $p = p_0$ and $q = q_0$ such that there exists at least one value of r for which the triple $(p_0; q_0; r)$ is acceptable. Then there exists such triple with the minimal possible value of r and it corresponds to a triple $(x; y; z)$ in which either two numbers are equal, or $xyz = 0$. Moreover, such triple with the maximal value of r corresponds to a triple $(x; y; z)$ containing two equal numbers.

On ne peut pas avoir $xyz = 0$ car les trois termes x, y et z sont strictement positifs.

Examinons sans perte de généralité le cas $y = z$. On en déduit $b = c$ et le triangle ABC est isocèle de sommet A.

Sans perte de généralité, on pose $a = 1$ et l'inégalité (I) devient $b^2 + 2 \geq 5R$.

On a l'égalité $b^2 + 2 = 5R$ quand le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet A avec $b = \sqrt{2}/2$ et $R = 1/2$.

Comme le triangle isocèle ABC est acutangle, on vérifie aisément que $b^2 + 2 > 5R$.