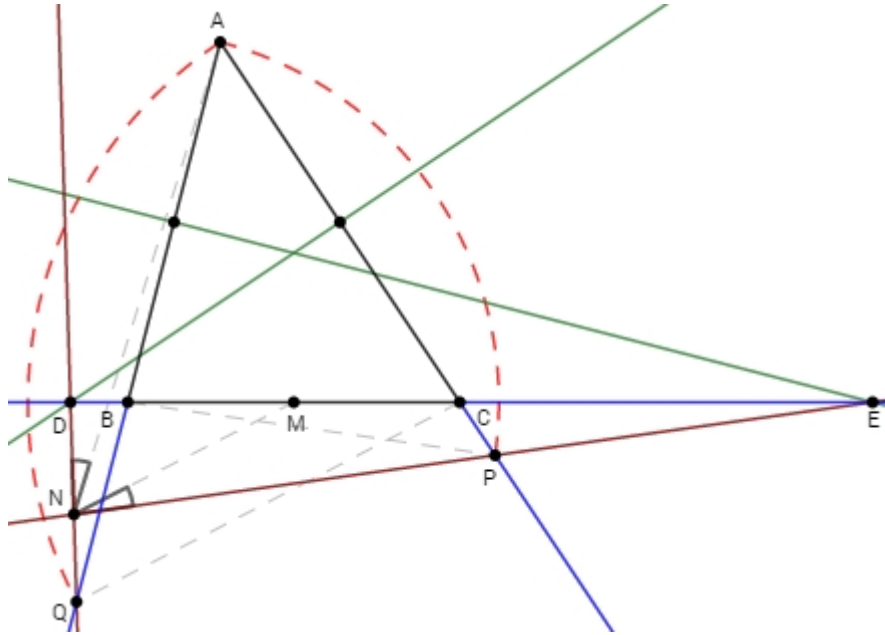


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 894. (XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (2018)) Sea ABC un triángulo acutángulo con $b > c > a$. Las mediatrices de AC y AB intersecan a la recta BC en los puntos D y E , respectivamente. Sean P y Q puntos distintos de A , situados sobre las rectas AC y AB , respectivamente, y tales que $AB = BP$ y $AC = CQ$, y sea N el punto de intersección de las rectas EP y DQ . Si M es el punto medio del segmento BC , demostrar que:

$$\triangle AND = \triangle ENM$$



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , como las ecuaciones de las dos mediatrices consideradas son:

$$\begin{cases} m_{AC} \equiv 0 = b^2x + (a^2 - c^2)y - b^2z \\ m_{AB} \equiv 0 = c^2x - c^2y + (a^2 - b^2)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} D = (0 : b^2 : a^2 - c^2) \\ E = (0 : a^2 - b^2 : c^2) \end{cases}$$

Además, si:

$$\begin{cases} P = (p : 0 : 1 - p) \\ Q = (q : 1 - q : 0) \end{cases} \quad (p \neq 1 \neq q)$$

como:

$$\begin{cases} BP = c \\ CQ = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{a^2 - c^2}{b^2} \\ q = \frac{a^2 - b^2}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = (a^2 - c^2 : 0 : -a^2 + b^2 + c^2) \\ Q = (a^2 - b^2 : -a^2 + b^2 + c^2 : 0) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

entonces:

$$\begin{cases} EP \equiv 0 = (b^2 - a^2)(a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - c^2)c^2y + (a^2 - b^2)(c^2 - a^2)z \\ DQ \equiv 0 = (a^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)y + (b^2 - a^2)b^2z \end{cases}$$

por lo que:

$$N = (a^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) : (a^4 - b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2a^2c^2)(b^2 - a^2) : (a^4 + b^4 - c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2)(c^2 - a^2))$$

Finalmente:

① Como:

$$\begin{cases} AN \equiv 0 = (a^4 + b^4 - c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2)(c^2 - a^2)y + (a^4 - b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2a^2c^2)(a^2 - b^2)z \\ ND \equiv 0 = (a^4 + c^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2)x + (b^2 - a^2)(c^2 - a^2)y + b^2(b^2 - a^2)z \end{cases}$$

entonces:

$$S \cot(\triangle AND) = \frac{S_d(b^2 - a^2)(c^2 - a^2 - b^2)((a^4 + b^4 - c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2)(c^2 - a^2) - (a^4 - b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2a^2c^2)(a^2 - b^2)) + S_d(a^4 - b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2a^2c^2)(b^2(b^2 - a^2) - a^4 + c^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2) + S_d(a^4 + b^4 - c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2)(c^2 - a^2)((b^2 - a^2)(c^2 - a^2) - a^4 + c^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a^4 + b^4 - c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2)(c^2 - a^2) & (a^4 - b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2a^2c^2)(a^2 - b^2) \\ a^4 + c^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2 & (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) & b^2(b^2 - a^2) \end{vmatrix}}$$

$$S \cot(\triangle AND) = \frac{a^6 - a^4(2b^2 + 3c^2) + a^2(b^4 + 3c^4) + b^4c^2 - c^6}{2(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}$$

② Como $M = (0 : 1 : 1)$, entonces:

$$\begin{cases} EN \equiv 0 = (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2)x + c^2(c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)z \\ NM \equiv 0 = (c^2 - b^2)(2a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 + 2b^2c^2)x + a^2(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)y + a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)z \end{cases}$$

por lo que:

$$S \cot(\triangle ENM) = \frac{S_d(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - c^2)(2a^4(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + S_d(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - (a^2 - b^2)(a^2 - c^2))((c^2 - b^2)(2a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 + 2b^2c^2) - a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)) + S_d(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - c^2(c^2 - a^2))((c^2 - b^2)(2a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 + 2b^2c^2) - a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2))}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 & c^2(c^2 - a^2) & (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \\ (c^2 - b^2)(2a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 + 2b^2c^2) & a^2(a^2 - b^2)(c^2 - a^2) & a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \end{vmatrix}}$$

$$S \cot(\triangle ENM) = \frac{a^6 - a^4(2b^2 + 3c^2) + a^2(b^4 + 3c^4) + b^4c^2 - c^6}{2(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}$$

y, por tanto:

$$\cot(\triangle AND) = \cot(\triangle ENM) \Rightarrow \triangle AND = \triangle ENM$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega