

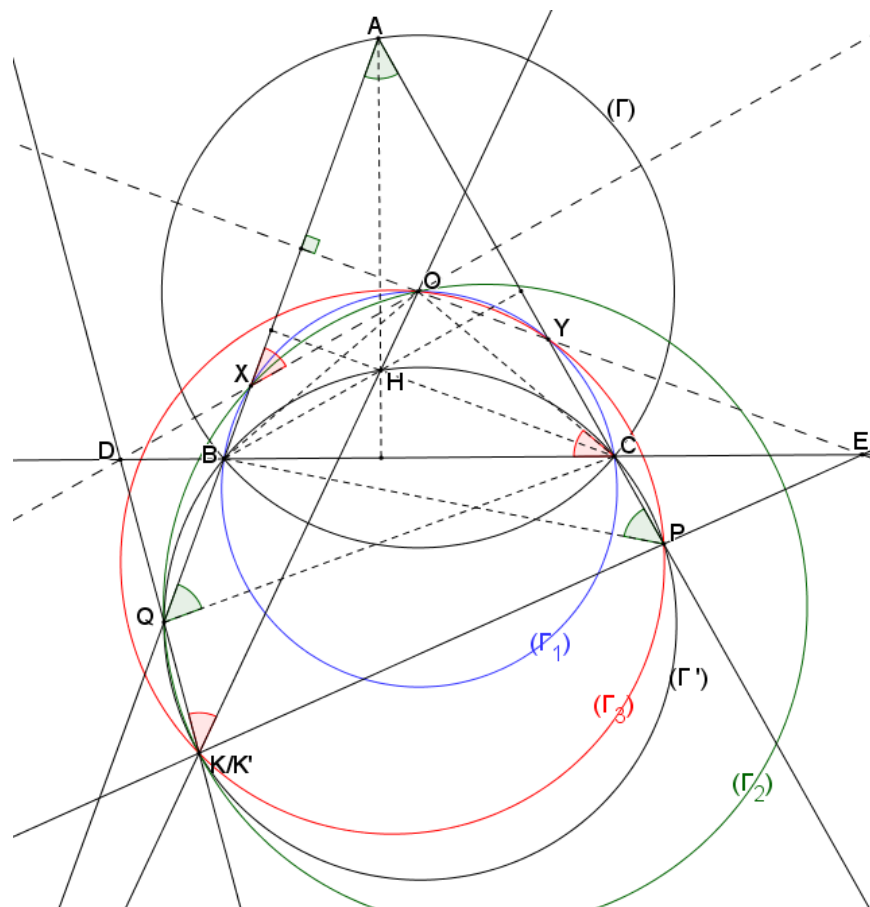
Problema n° 894

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB > BC$. Las mediatrices de AC y AB intersecan a la recta BC en D y E, respectivamente.

Sean P y Q puntos distintos de A sobre las rectas AC y AB, respectivamente, tales que $AB=BP$, y $AC=CQ$, y sea K la intersección de las rectas EP y DQ.

Sea M el punto medio de BC. Demostrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

[XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas](#) (2018) (La Rábida y Monte Gordo)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Soient :

O le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC,

H l'orthocentre de ce même triangle,

X le point d'intersection de la médiatrice du côté AC avec le côté AB,

Y l'homologue de X sur le côté AC.

Comme $AC > AB > BC$ les points X et Y sont respectivement à l'intérieur des côtés AB et AC.

Lemme n°1: les points O, H et K sont alignés.

Par construction les triangles ABP et ACQ sont isocèles.

D'où $\angle APB = \angle AQC = \angle BAC = 180^\circ - \angle BHC$. Les cinq points B, H, C, P, Q sont sur un même cercle (Γ') qui est le symétrique de (Γ) par rapport à la droite [BC].

Soit K' le point d'intersection de la droite [OH] avec le cercle (Γ') .

On a $\angle AXO = 90^\circ - \angle BAC$ et $\angle BCO = (180^\circ - \angle BOC)/2 = 90^\circ - \angle BAC$. Les quatre points B, C, X et O sont sur un même cercle (Γ_1) tracé en bleu.

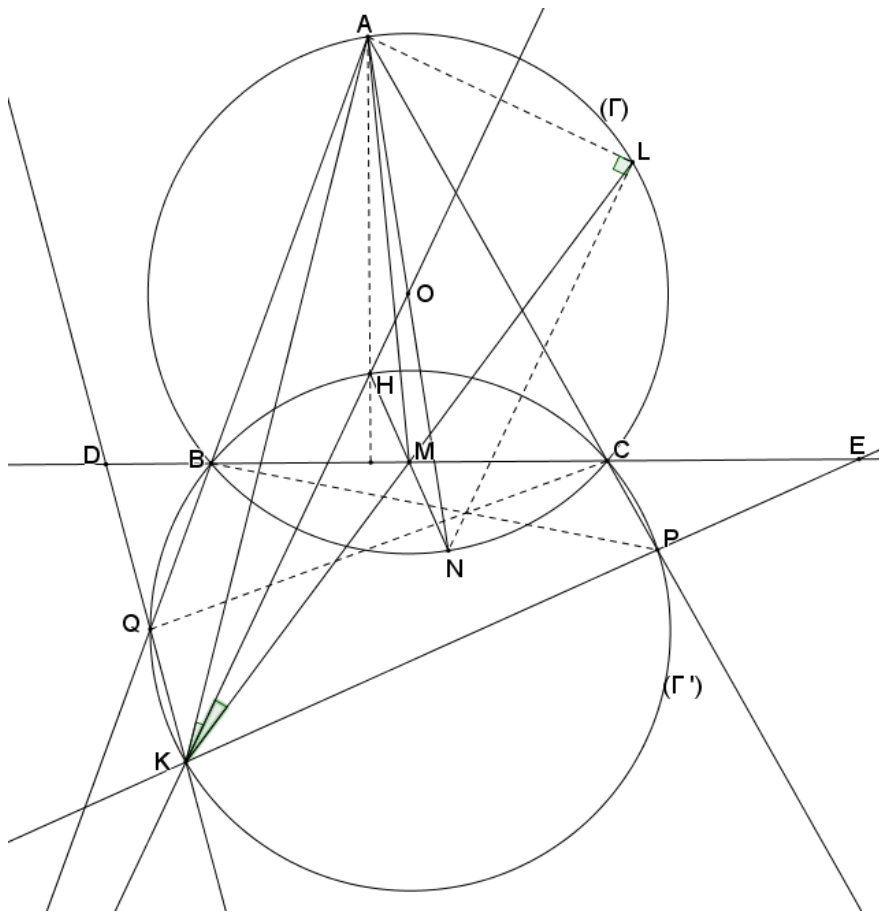
Par ailleurs $\angle HK'Q = \angle HCQ = 90^\circ - \angle AQC = 90^\circ - \angle BAC$. Les quatre points Q, K', O et X sont sur un même cercle (Γ_2) tracé en vert.

Dès lors, la droite [BC] est l'axe radical des cercles (Γ') et (Γ_1) , la droite [OX] est l'axe radical des cercles (Γ_1) et (Γ_2) et la droite [QK'] est l'axe radical des cercles (Γ') et (Γ_2) . Le point D à l'intersection des droites [BC] et [OX] est le centre radical des trois cercles (Γ') , (Γ_1) et (Γ_2) et le point K' est donc sur la droite [DQ].

De la même manière on démontre que les quatre points B, C, Y et O sur un même cercle (Γ_3) et que le point E est le centre radical des trois cercles (Γ') , (Γ_1) et (Γ_3) . Le point K' à la fois sur les droites [DQ] et [EP] est confondu avec le point K. Les trois points O, H et K sont alignés.

Corollaire: la droite [OK] est la bissectrice intérieure de l'angle $\angle DKE$

On a $\angle HBP = 90^\circ - \angle APB = 90^\circ - \angle BAC = \angle HCQ$. Le point H est le milieu de l'arc PQ qui ne contient pas le point K et la droite HK est la bissectrice de l'angle $\angle PKQ$, c'est à dire de l'angle $\angle DKE$.



Lemme n°2 la droite [OK] est la bissectrice intérieure de l'angle $\angle AKM$

Comme les cercles (Γ) et (Γ') sont symétriques par rapport à la droite $[BC]$, la droite $[KM]$ rencontre le cercle (Γ) en un point L symétrique de K par rapport au milieu M de BC tandis que la droite $[HM]$ rencontre (Γ) en un point N symétrique de H par rapport à M .

Le quadrilatère $KHLN$ est alors un parallélogramme et la droite $[LN]$ est parallèle à la droite $[OK]$. Or il est bien connu que dans tout triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport au milieu d'un côté est diamétralement opposé au sommet opposé à ce côté. Le segment AN est donc un diamètre de (Γ) et $\angle ALN = 90^\circ$. La droite $[OK]$ qui passe par O centre de (Γ) est médiatrice de la corde AL . C'est en même temps la bissectrice de l'angle $\angle AKL$, c'est à dire de l'angle $\angle AKM$.

Conclusion

$\angle DKA = \angle DKO - \angle AKO = \angle EKO - \angle MKO = \angle EKM$. C.q.f.d.