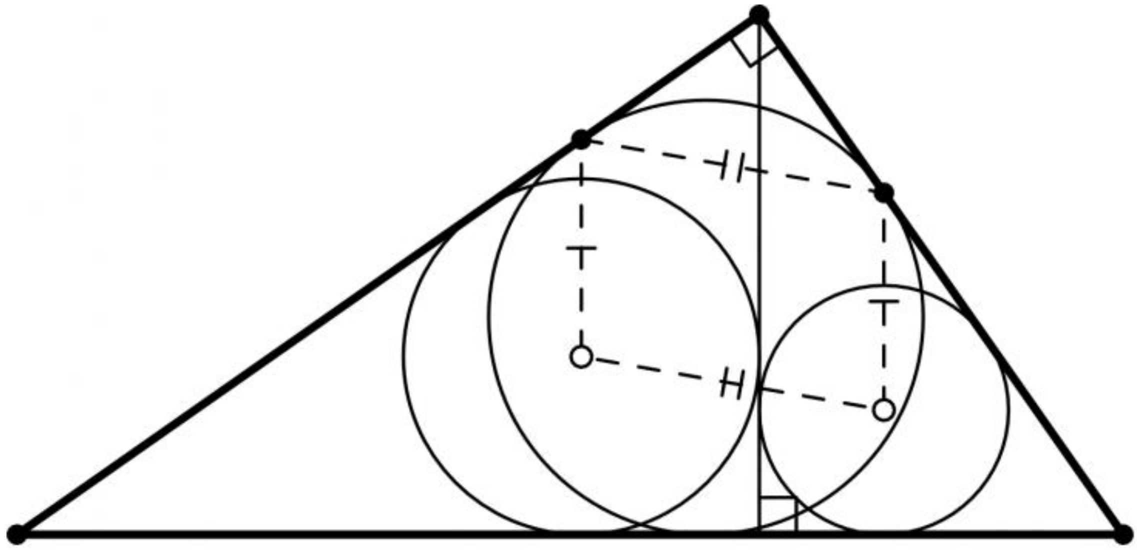
Problema 895.-
Problema sin palabras:



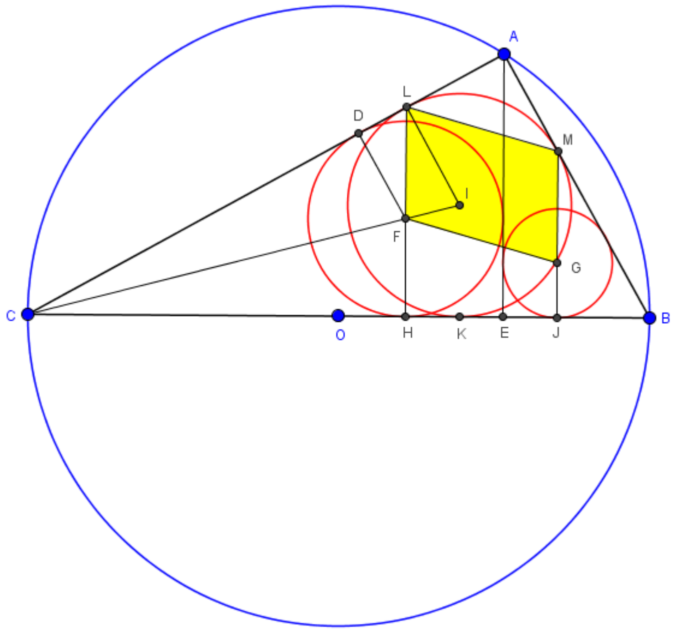
Akopyan, A. (2018): Figure sans paroles #4.10.8

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea L, punto de contacto de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, de centro I y radio r con el lado AC.

Sea F, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo CAE. Sea r_1 el radio de la misma y D y H, los puntos de contacto con los lados AC y BC, respectivamente.

Sean H y D, los puntos de contacto de la circunferencia inscrita en el triángulo en el triángulo rectángulo CAE, de centro F y radio r_1 con los lados BC y Ac, respectivamente.



Por la simetría de la figura, si probamos que $L, F\ y\ H$ están alineados, lo estarán entre sí también, $M, G\ y\ J$.

Lema: $L, F\ y\ H$ están alineados perpendicularmente al lado BC.

Para probar este hecho, bastará verificar e identificar la longitud del segmento CH_1 en el triángulo CLH_1, rectángulo en H_1. Como este triángulo es semejante al inicial ABC, tenemos que:

$\frac{CH_1}{b} = \frac{p-c}{a}, siendo\ p = \frac{1}{2}(a+b+c).$

Por tanto, $CH_1 = \frac{b}{2a}(a+b-c)$

Por otro lado, sea H_2 el punto de contacto de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo CAE, de centro F y radio r_1 con el lado BC.

Por tanto, $CH_2 = q - AE, siendo\ q = \frac{1}{2}(CE + AE + b).$

Ahora bien, $AE = h_a = \frac{bc}{a}$, $y \quad b^2 = CE \cdot a \rightarrow CE = \frac{b^2}{a}$.

En definitiva,

$$CH_2 = q - AE = \frac{1}{2}(CE - AE + b) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} - \frac{bc}{a} + b\right) = \frac{b}{2a}(a + b - c)$$

$$\rightarrow CH_2 = CH_1 \rightarrow H_2 = H_1 = H.$$

En definitiva, $L, F\ y\ H$ están alineados perpendicularmente al lado BC. Procediendo de un modo similar, también lo estarían los puntos $M, G\ y\ J$. En definitiva los lados $LF\ y\ MG$ del cuadrilátero $LMGF$son paralelos.

Vamos ahora a probar que tienen igual longitud $LF\ y\ MG$. De este modo, la figura coloreada $LMGF$ sería un paralelogramo.

* *Longitud de LF.*

$LF = LH - HF = LH - r_1$.

Ahora bien,

$$\frac{LH}{c} = \frac{CH}{b} \rightarrow LH = \frac{c}{b}CH = \frac{c}{b}\frac{b}{2a}(a + b - c) \rightarrow LH = \frac{c}{2a}(a + b - c)$$

Por otra parte,

$$r_1 \cdot q = \frac{1}{2}AE \cdot CE \rightarrow r_1 = \frac{AE \cdot CE}{q} = \frac{\frac{1}{2}\frac{bc}{a}\cdot\frac{b^2}{a}}{\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{bc}{a}+b\right)} = \frac{b^2c}{a\,(a+b+c)}.$$

En definitiva,

$$LF = LH - HF = \frac{c}{2a}(a + b - c) - \frac{b^2c}{a\,(a+b+c)} = \frac{c\,(a+b-c)(a+b+c) - 2b^2c}{2a\,(a+b+c)}$$

$$LF = \frac{c\,(a^2+b^2-c^2+2ab) - 2b^2c}{2a\,(a+b+c)} = \{a^2 = b^2 + c^2\} = \frac{c\,(2b^2+2ab) - 2b^2c}{2a\,(a+b+c)}$$

$$LF = \frac{bc}{a+b+c}$$

De igual modo, obtendríamos la longitud de $MG = \frac{bc}{a+b+c} = LF$

En definitiva, $LMGF$ es un paralelogramo.

Además observamos otro detalle no menor en la configuración dada.

$$r_1 = \frac{b^2c}{a\,(a+b+c)};\ r_2 = \frac{c^2b}{a\,(a+b+c)};\ r = \frac{bc}{a+b+c} \rightarrow$$

$$r_1 + r_2 + r = \frac{b^2c+c^2b+abc}{a\,(a+b+c)} = \frac{b^2c+c^2b+abc}{a\,(a+b+c)} = \frac{bc}{a} = h_a.$$

Es decir, $\boldsymbol{h_a = r_1 + r_2 + r}$.