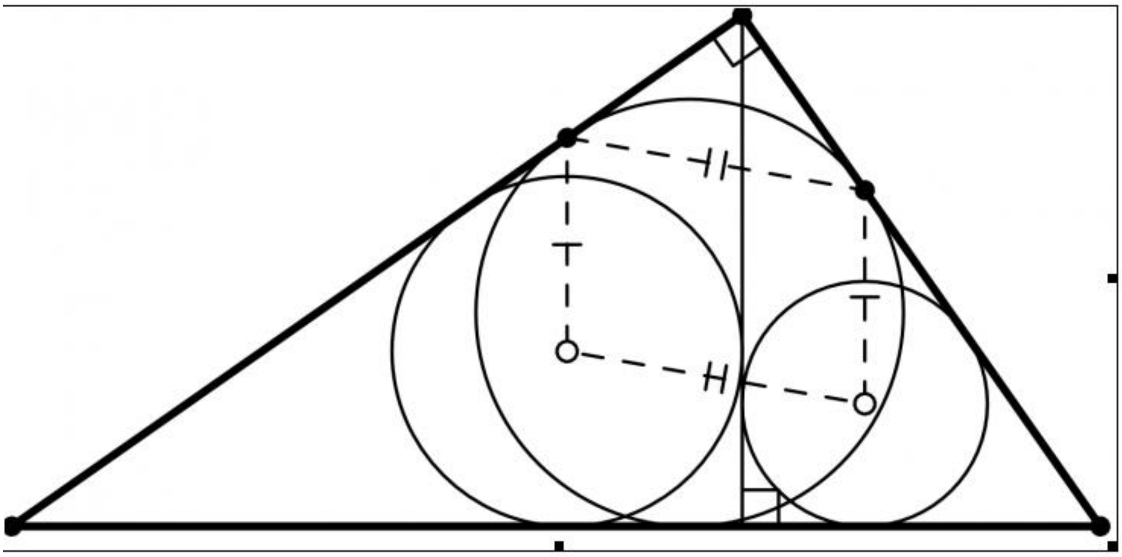
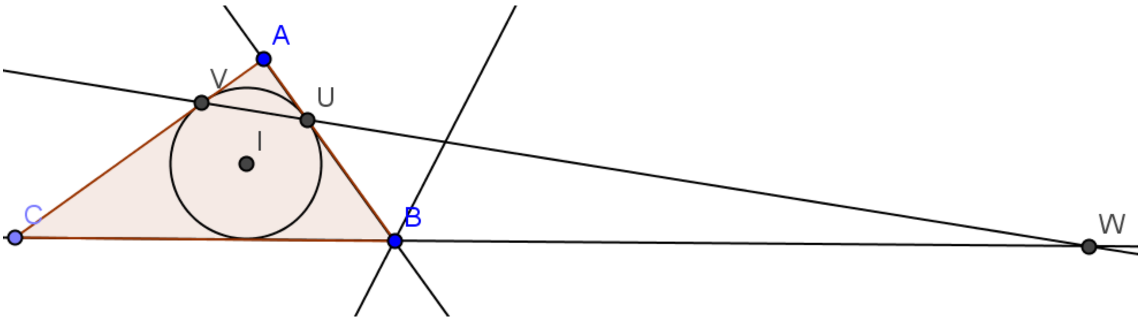
Problema 895



Akopyan, A. (2018): Figure sans paroles #4.10.8

Solución del director



Sea ABC el triángulo rectángulo con A=90º, B>C.

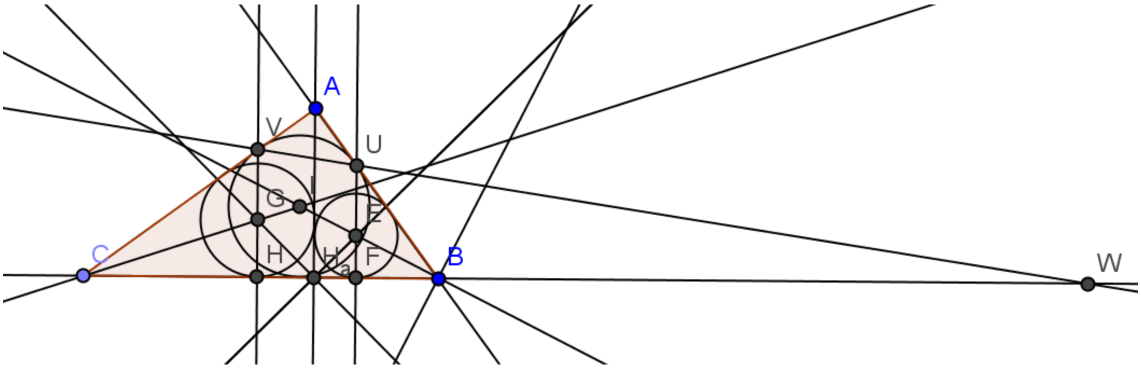
Sean U y V los puntos de tangencia de la inscrita a los lados AB y AC.

El radio de la inscrita es r=IU=IV=AU=AV, con lo que $UV = r\sqrt{2}$

La recta UV cortará a la recta AB en W.

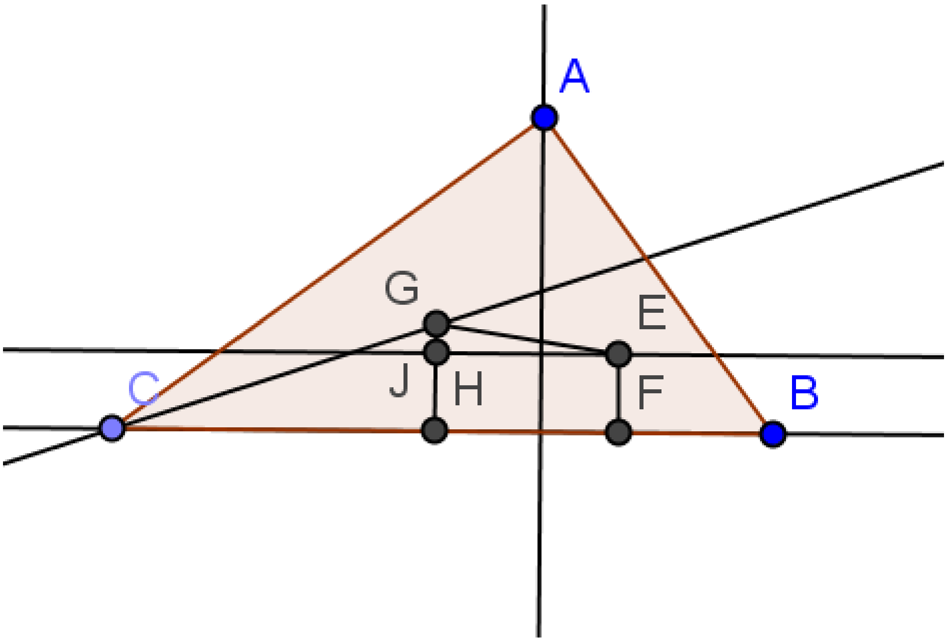
Si B=45º+w, C=45º-w, UWB=w.

Así tg(45+w)=$tg(45º + w) = \frac{tg\ 45º + tg\ w}{1 - tg\ 45º\ tg\ w} = \frac{b}{c} \rightarrow tg\ w = \frac{b-c}{b+c}$



Estudiemos E y G, los centros de las circunferencias.

Los triángulos ABC, H_aAC, y H_aBA son semejantes de razones b/a y c/a . Por ello los radios de las inscritas mantienen la razón de semejanza.



Si consideramos el triángulo rectángulo EGJ, tenemos EJ=(r b/a) + (r c/a), JG=(r b/a)-(r c/a)

Así, la distancia entre los radios es

$$EG = \sqrt{EJ^2 + JG^2} = \frac{r}{a}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc + b^2 + c^2 - 2bc} = r\sqrt{2}$$

Y $tg\ GEJ = \frac{JG}{EJ} = \frac{b-c}{b+c}$.

Así los segmentos UV y EG miden igual y son paralelos, c.q.d.

Ricardo Barroso Campos Sevilla. Jubilado