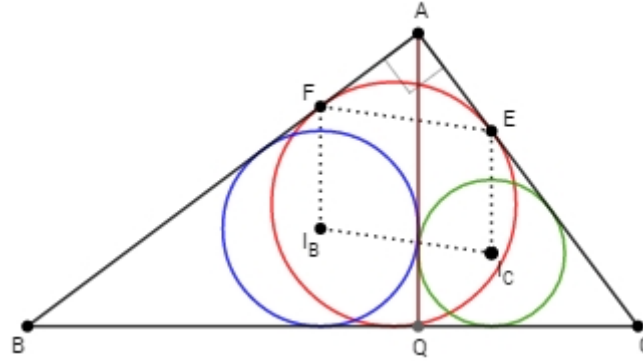


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 895. (Akopyan, A. (2018), figura sin palabras) Dado un triángulo ABC rectángulo en A , se consideran el pie Q de la altura correspondiente al vértice A y los puntos de contacto E y F de su circunferencia inscrita con los lados AC y AB , respectivamente. Si I_B e I_C son los incentros de los triángulos QAB y QCA , respectivamente, probar que el cuadrilátero EFI_BI_C es un paralelogramo.



Solución:

Como el triángulo ABC es rectángulo en A , entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = 0 \\ S_B = c^2 \\ S_C = b^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que:

$$\begin{cases} E = (a + b - c : 0 : -a + b + c) = \left(\frac{a+b-c}{2b} : 0 : \frac{-a+b+c}{2b} \right) \\ F = (a - b + c : -a + b + c : 0) = \left(\frac{a-b+c}{2c} : \frac{-a+b+c}{2c} : 0 \right) \end{cases}$$

y como $Q = (0 : b^2 : c^2)$, entonces, la ecuación de una recta general que pasa por este punto es:

$$px + c^2y - b^2z = 0 \quad (p \in \mathbb{R})$$

e, imponiendo que forme ángulos de $\pm \frac{\pi}{4}$ con la recta BC (cuya ecuación es $x = 0$), obtenemos que:

$$\pm bc = \frac{c^2(p + b^2) + b^2(p - c^2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & c^2 & -b^2 \end{vmatrix}} = p$$

y, de esta forma, hemos obtenido las ecuaciones de las bisectrices interiores de los ángulos $\triangle CQA$ y $\triangle AQB$:

$$\pm bcxc^2y - b^2z = 0$$

por lo que, al ser las ecuaciones de las bisectrices interiores correspondientes a los vértices B y C :

$$\begin{cases} b_B \equiv 0 = cx - az \\ b_C \equiv 0 = bx - ay \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

podemos obtener las coordenadas de los puntos I_B e I_C resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 = cx - az \\ 0 = -bcxc^2y - b^2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow I_B = (ac : b(b+c) : c^2) = \left(\frac{c}{a+b+c} : \frac{b(b+c)}{a(a+b+c)} : \frac{c^2}{a(a+b+c)} \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 = bx - ay \\ 0 = bcxc^2y - b^2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow I_C = (ab : b^2 : c(b+c)) = \left(\frac{b}{a+b+c} : \frac{b^2}{a(a+b+c)} : \frac{c(b+c)}{a(a+b+c)} \right) \end{array} \right.$$

Finalmente, podemos concluir que el cuadrilátero EFI_BI_C es un paralelogramo, pues:

① Como:

$$\left\{ \begin{array}{l} EF^2 = c^2 \left(\frac{-a+b+c}{2c} \right)^2 + b^2 \left(\frac{-a+b+c}{2b} \right)^2 = \frac{(-a+b+c)^2}{2} \\ I_B I_C^2 = c^2 \left[\frac{b(b+c)}{a(a+b+c)} - \frac{b^2}{a(a+b+c)} \right]^2 + b^2 \left[\frac{c(b+c)}{a(a+b+c)} - \frac{c^2}{a(a+b+c)} \right]^2 = \frac{2b^2c^2}{(a+b+c)^2} \end{array} \right.$$

entonces:

$$EF^2 - I_B I_C^2 = \frac{(-a+b+c)^2}{2} - \frac{2b^2c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{[(b+c)^2 - a^2]^2 - 4b^2c^2}{2(a+b+c)^2} \stackrel{a^2=b^2+c^2}{=} 0$$

por lo que:

$$EF = I_B I_C$$

② Como:

$$\left\{ \begin{array}{l} FI_B^2 = c^2 \left[\frac{b(b+c)}{a(a+b+c)} - \frac{-a+b+c}{2c} \right]^2 + b^2 \left[\frac{c^2}{a(a+b+c)} \right]^2 \stackrel{a^2=b^2+c^2}{=} \frac{b^2c^2}{(a+b+c)^2} \\ EI_C^2 = c^2 \left[\frac{b^2}{a(a+b+c)} \right]^2 + b^2 \left[\frac{c(b+c)}{a(a+b+c)} - \frac{-a+b+c}{2b} \right]^2 \stackrel{a^2=b^2+c^2}{=} \frac{b^2c^2}{(a+b+c)^2} \end{array} \right.$$

entonces:

$$FI_B^2 = EI_C^2$$