Pr. Cabri 897

Enunciado

Dado un triángulo ABC, proyectamos el vértice A sobre las bisectrices (interior y exterior) de B (y de C) obteniendo, respectivamente los 4 puntos Pab, Qab, Pac y Qac .
Repitiendo esta operación para los vértices B y C resultarían 8 puntos más, Pba, Qba, Pbc y Qbc (proyectando B) y Pca, Qca, Pcb y Qcb (proyectando C).
Nombremos también a los incírculos como Exa, Exb, Exc e In
Demostrar:
A. Estos 12 puntos se pueden agrupar en 4 series concílicas de 6 puntos:
cma:PabPacPcbPbcQcaQba, cmb:PbcPbaPacPcaQabQcb, cmc:PcaPcbPbaPabQacQbc y cm:QabQacQbaQbcQcaQcb.
B. Cada uno de estos círculos es la circunferencia de Monge (ortogonal) de 3 inscritas. Así cm corta ortogonalmente a Exa, Exb y Exv, cma corta a Exb, Exc e In, etc.
C. Si Ma, Mb, Mc y M son sus centros, estos forman un sistema ortogonal y además los lados (o prolongaciones) de cualquier triangulo con esos vértices corta al ABC en los puntos medios de sus lados.
Beade, C. (2018),

Comentario

La siguiente solución es analítica. Se usa un triángulo de vértices A(eh,S), B(1,0), C(1,0) donde B y C se considera focos de una elipse y una hipérbola de semiejes horizontales respectivos, e y h. Resoviendo el sistema formado por sus ecuaciones se obtienen las coordenadas de A, (eh, $\sqrt{(1+e^2)\ (1-h^2)}$ =S), donde S es (ABC).
Se presupone que algunos cálculos (realizados con “Mathematica”) están automatizados. Básicamente para este problema, producto escalar, distancia, proyección punto-recta, ortocentro, corte de dos rectas dadas por 4 puntos y obtención de incírculos (en la forma Circ(ct,r)).
Por alguna misteriosa razón los cálculos donde intervienen incírculos son más “simples” sobre triángulos de este tipo.
En la génesis del problema está el punto proyección de un vértice sobre una bisectriz. Sospeché que los 12 puntos de esas características estarían relacionados de alguna manera.

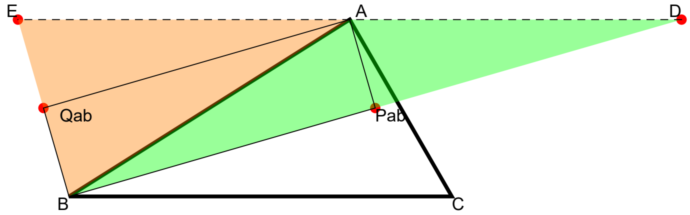
Solución

de César Beade Franco

Proyecciones

Proyectamos el vértice A sobre la bisectriz interior de B (o de C). Obtenemos así 2 puntos que denotamos por Pab y Qab. Otro tanto sucedede si las proyecciones son sobre las bisectrices de C, obteniendo otros 2 puntos, Pac y Qac.
Repitiendo lo mismo para los vértices B y C obtenemos Pba, Pbc, Qba y Qbc sobre la paralela media relativa a B y los puntos Pca,Pcb,Qca, y Qcb sobre la otra paralela media.

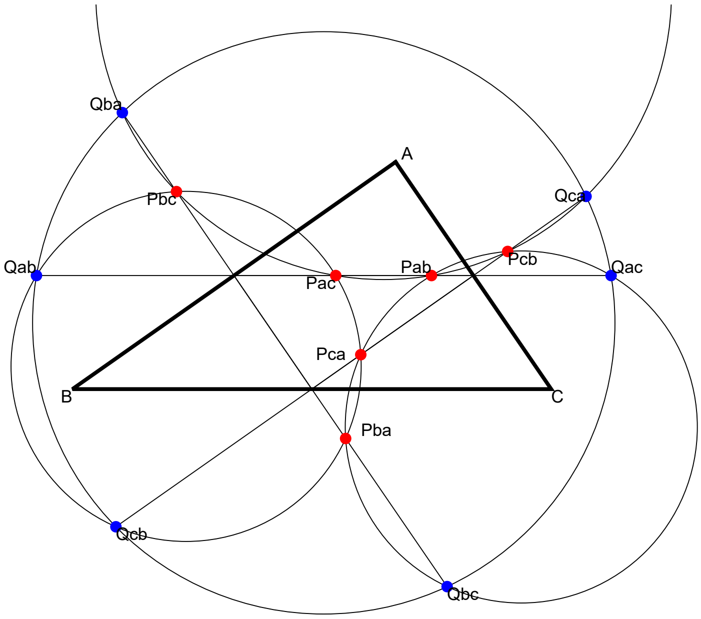
Veamos las coordenadas de algunos de estos puntos;
Qab=$\left(\frac{1}{2}\,(-1+e\,(-1+h)-h),\ \frac{1}{2}\,S\right)$, Qbc=$\left(\frac{1-e\,h}{e-h},\ -\frac{S}{e-h}\right)$, Qca=$\left(\frac{e\,(1+e\,h)}{e+h},\ \frac{e\,S}{e+h}\right)$, etc



Si bien no es preciso para el problema, podemos observar que estas proyecciones están sobre las paralelas media respecto al vértice implicado. Veamoslo para Pab y Qab.
Prolongamos las bisectrices desde B hasta cortar a la paralela a BC por A. Obtenemos los puntos D y E. Los triángulos ABD y ABE son isósceles (ángulos iguales en B y D y en B y E, respectivamente). Así que las alturas trazadas desde A (que son bisectrices) cortan a las bisectrices desde B en los puntos Pab y Qab, situados sobre la paralela media respecto al vértice A.

Conciclidad

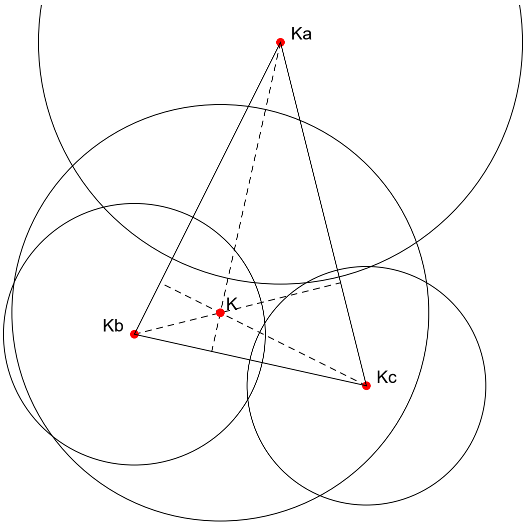
Estos 12 puntos se pueden agrupar en 4 series concílicas de 6 puntos:
ka:Pab, Pac, Pcb, Pbc, Qca, Qba; kb:Pbc, Pba, Pac, Pca, Qab, Qcb; kc:Pca, Pcb, Pba, Pab, Qac, Qbc y k:Qab, Qac, Qba, Qbc, Qca, Qcb.
Por ejemplo nos bastaría comprobar que el circuncírculo de Qab,Qbc y Qca es el mismo que el de Qba,Qac y Qcb. Escrito es la forma centro-radio obtenemos en ambos casos C[$\left(\frac{(-1+e)\,h}{2},\ \frac{e\,S}{2+2\,e}\right),\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,e+3\,e^2+e^3+h^2-e\,h^2}{1+e}}$] y expresiones análogas para los otros círculos los que podemos llamar Ck, Cka, Ckb y Ckc.

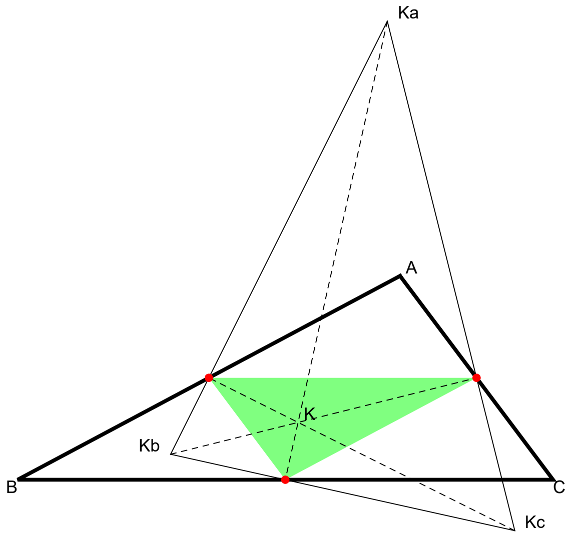


De la construcción de estos círculos deducimos que sus ejes radicales (tomados de 2 en 2) son las 6 bisectrices y sus centros radicales (tomados de 3 en 3) son los centros de los 4 incírculos.

Centros

Consideremos ahora los 4 centros K, Ka, Kb y Kc de estos círculos. Sus coordenadas son K=($\frac{1}{2}\,(-1+e)\,h,\ \frac{e\,S}{2+2\,e}$), Ka=($\frac{1}{2}\,(1+e)\,h,\ \frac{e\,S}{2\,(-1+e)}$), Kb=($\frac{1}{2}\,e\,(-1+h),\ \frac{h\,S}{2+2\,h}$) y Kc=($\frac{1}{2}\,e\,(1+h),\ \frac{h\,S}{2\,(-1+h)}$). Resulta que constituyen un sistema ortogonal. Nos basta probar que Ortocentro[Ka,Kb, Kc]=K, lo que sucede.

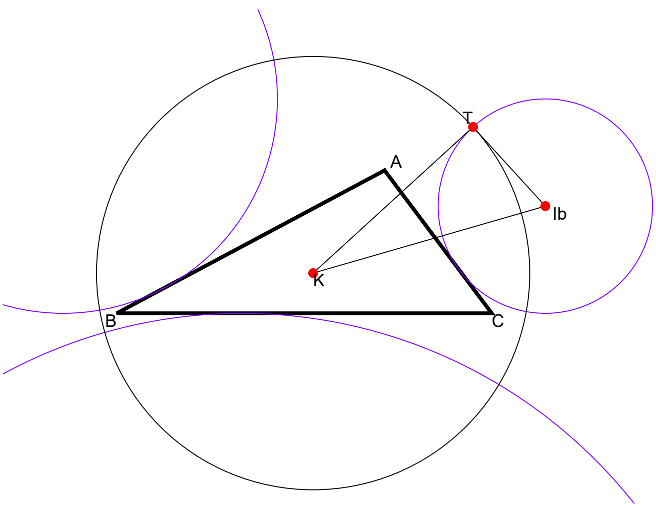


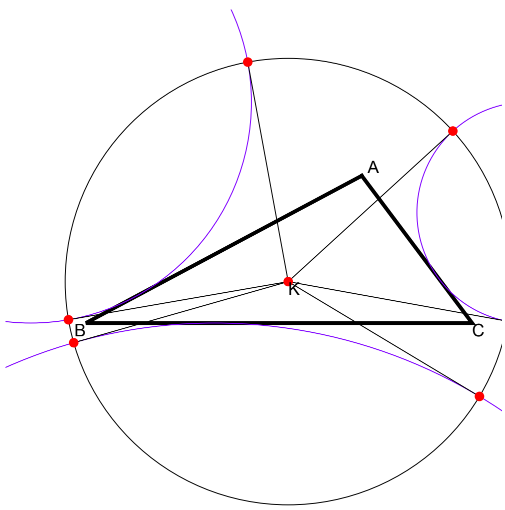


Además los lados (o sus prolongaciones) de cualquier triángulo con 3 de esos vértices corta al ABC en los puntos medios de sus lados. Se comprueba que BC corta a CkbCkz y a CkCka en el punto medio de BC, (0,0) en este caso. Y lo mismo sucede con los otros lados.

Circunferencias de Monge

Ck corta ortogonalmente a los 3 excírculos.



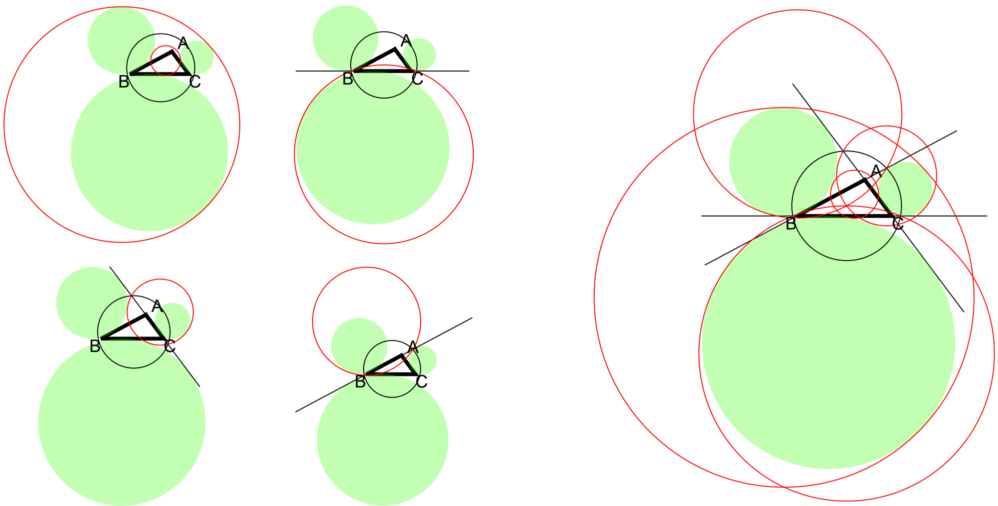


Comprobamos que corta ortogonalmente a Exb demostrando que $IbK^2=IbT^2+KT^2$. Y de la misma manera deducimos que también corta ortogonalmente a Exa y Exc. Y podemos proceder de la misma manera con Cka, Ckb y Ckc.

Es decir, Ck es la circunferencia de Monge (de invariancia, de similitud, radical) de Exa, Exb y Exc, así como Cka lo es de Ins, Exb y Exc, etc.
Su centro K es el centro radical de los ex-círculos.

Apolonio

Vamos a resover el problema de Apolonio para los 3 excírculos. Los lados y la C9P son 4 soluciones. Nos basta invertirlas para obtener las otras 4.



Consideremos ahora estas 4 inversas y sea r el radio de la inversa de C9P. Podemos expresar los radios de las otras 3 en función de r y de los lados del triángulo.
Si ra es el radio de la inversa, respecto a Ck del lado BC, entonces $\frac{r}{\mathrm{ra}}=\frac{b+c}{a}$, $\frac{r}{\mathrm{rb}}=\frac{c+a}{b}$, $\frac{r}{\mathrm{rc}}=\frac{a+b}{c}$. Si invertimos respecto a las otras circunferencias obtenemos expresiones parecidas.