Problema 897.-

Dado un triángulo ABC, proyectamos el vértice A sobre las bisectrices (interior y exterior) de B (y de C) obteniendo, respectivamente los 4 puntos $P_{ab}, Q_{ab}, P_{ac}\ y\ Q_{ac}$.

Repitiendo esta operación para los vértices B y C resultarían 8 puntos más, $P_{ba}, Q_{ba}, P_{bc}\ y\ Q_{bc}$ (proyectando B) y $P_{ca}, Q_{ca}, P_{cb}\ y\ Q_{cb}$ (proyectando C).

Nombremos también a los incírculos como $Ex_a, Ex_b, Ex_c\ e\ In$

Demostrar:

A. Estos 12 puntos se pueden agrupar en 4 series concíclicas de 6 puntos:

cma: $P_{ab}P_{ac}P_{cb}P_{bc}Q_{ca}Q_{ba}$,
cmb: $P_{bc}P_{ba}P_{ac}P_{ca}Q_{ab}Q_{cb}$,
cmc: $P_{ca}P_{cb}P_{ba}P_{ab}Q_{ac}Q_{bc}$ y
cm: $Q_{ab}Q_{ac}Q_{ba}Q_{bc}Q_{ca}Q_{cb}$.

B. Cada uno de estos círculos es la circunferencia de Monge (ortogonal) de 3 inscritas. Así cm corta ortogonalmente a Ex_a, Ex_b, Ex_c, cma corta a $Exb, Exc\ e\ In$, etc.

C. Si $M_a, M_b, M_c\ y\ M$ son sus centros, éstos forman un sistema ortogonal y además los lados (o prolongaciones) de cualquier triangulo con esos vértices corta al ABC en los puntos medios de sus lados.

Beade, C. (2018): Comunicación personal.

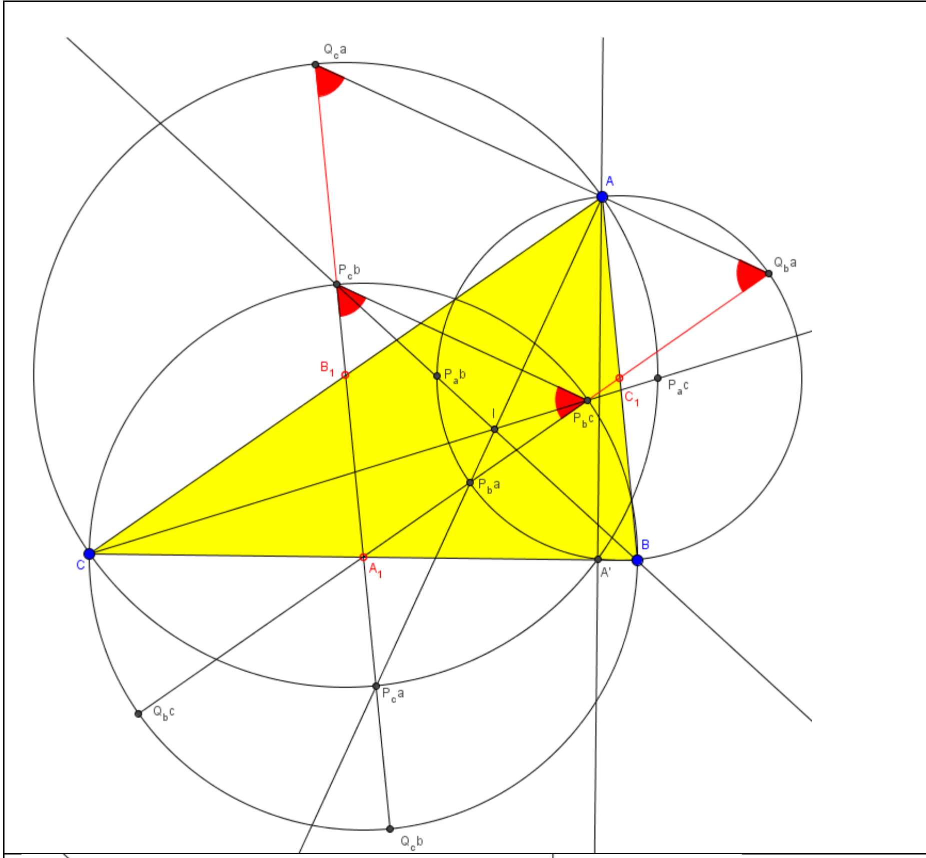
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Apartado a)

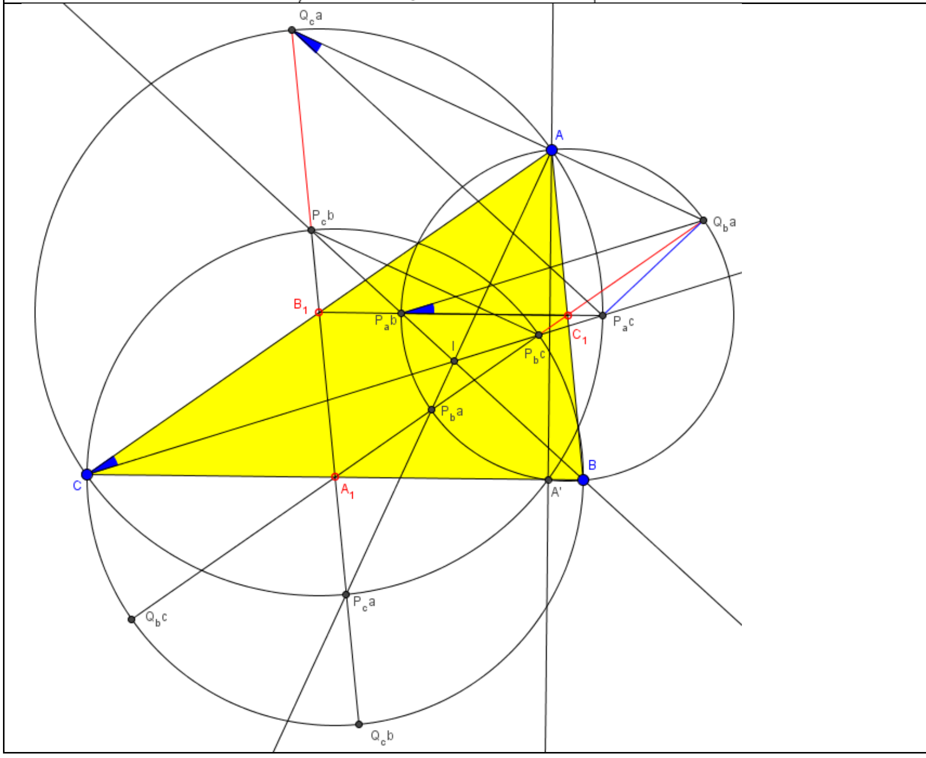
cma: $P_{ab}P_{ac}P_{cb}P_{bc}Q_{ca}Q_{ba}$.

Vamos a probar que estos 6 puntos son concíclicos y están sobre una misma circunferencia**.**

Para ello, vamos a visualizar algunas relaciones de interés



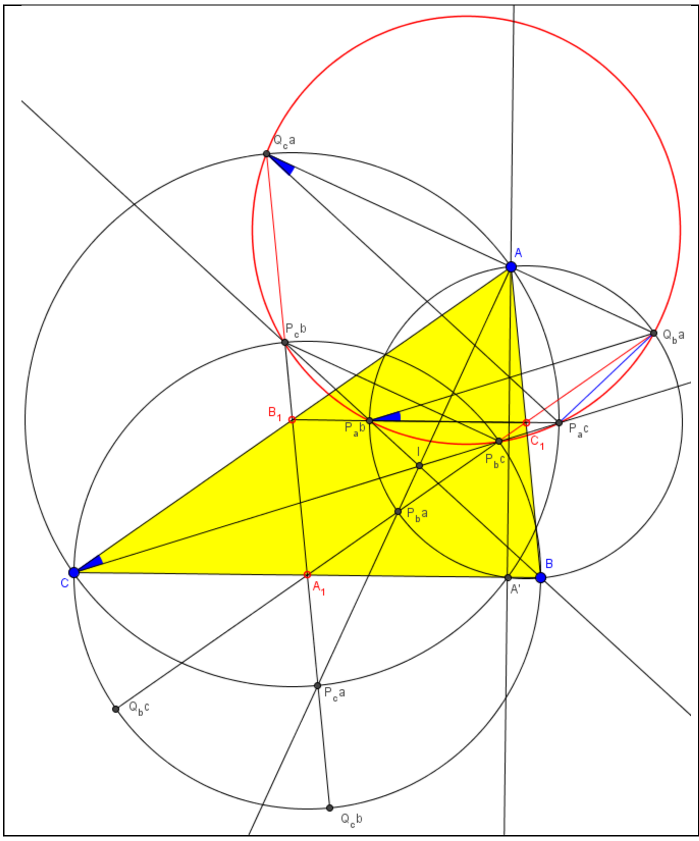
Los puntos $Q_{ca}Q_{ba}P_{bc}P_{cb}$ están sobre una misma circunferencia. Este hecho se desprende de la igualdad de ángulos señalados en esta figura adjunta.
El valor de esos ángulos es de $90º - \frac{1}{2}\measuredangle A$.



En el triángulo AC_1Q_{ba}, tenemos que el ángulo $\measuredangle AC_1Q_{ba} = \measuredangle B$.
Además $\measuredangle P_{ab}C_1A = \measuredangle A$, por estar el segmento $P_{ab}C_1$ sobre la paralela media B_1C_1.
Por tanto,
$\measuredangle Q_{ba}\mathrm{C_1P_{ac}} = \measuredangle A$.

Así entonces el ángulo $\measuredangle Q_{ba}\mathrm{P_{ab}C_1}$, inscrito en esta circunferencia de centro C_1 y radio $\frac{1}{2}AB$,
$\measuredangle Q_{ba}\mathrm{P_{ab}C_1} = \frac{1}{2}\measuredangle C$.

Por tanto, los puntos $Q_{ca}Q_{ba}P_{ac}P_{ab}$ están sobre una misma circunferencia.



Veamos ahora que los puntos $Q_{ca}P_{cb}P_{ab}P_{ac}$son también concíclicos.
Para ello basta observar la siguiente igualdad entre ángulos

$$\measuredangle P_{ac}Q_{ca}P_{cb} = \measuredangle BP_{ab}C_1 = \measuredangle BP_{ab}P_{ac} = \frac{1}{2}\measuredangle B$$

En definitiva, la serie de 6 puntos $Q_{ca}Q_{ba}P_{ac}P_{ab}P_{bc}P_{cb}$ son concíclicos.

De forma similar podríamos ver las restantes series de 6 puntos concíclicos.