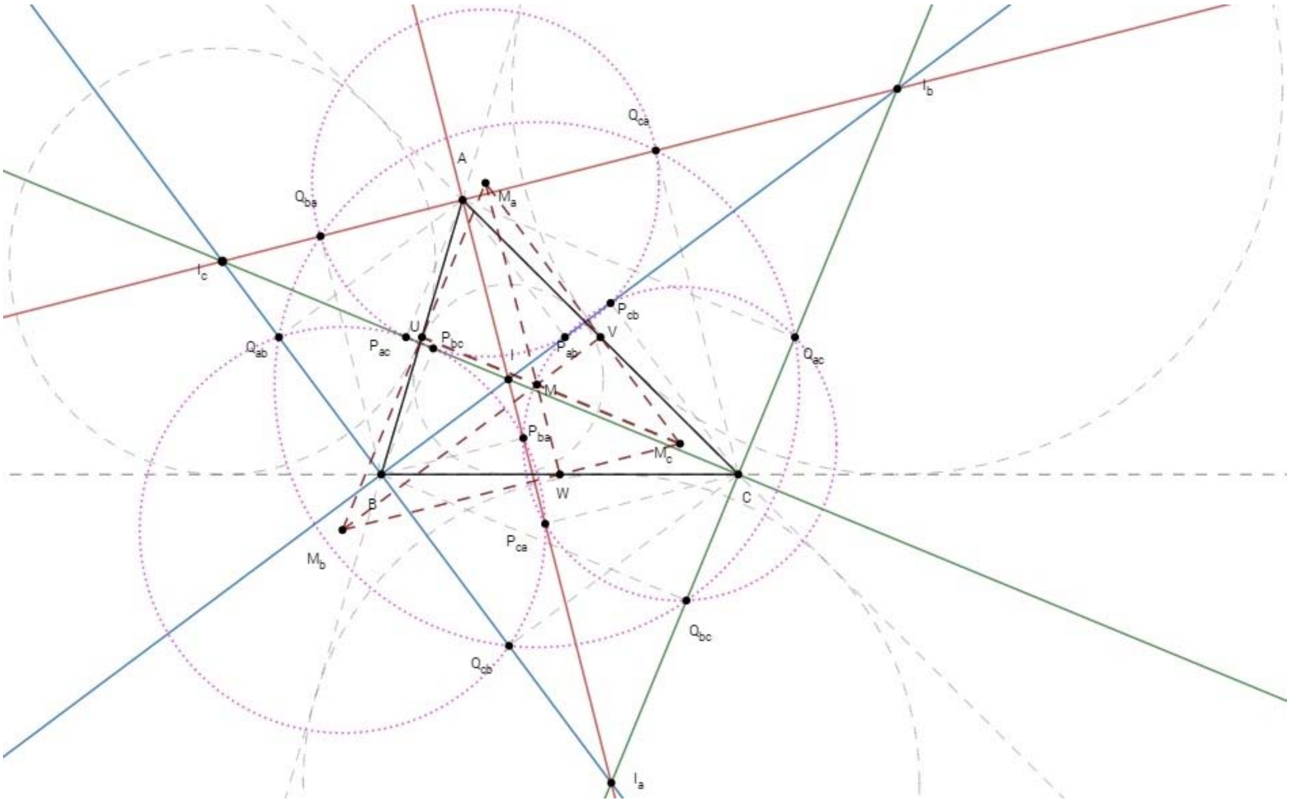
TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 897.</u> (César Beade Blanco, 2018) Dado un triángulo ABC, proyectamos el vértice A sobre las bisectrices interior y exterior de B y C, obteniendo, respectivamente, los puntos P_{ab}, Q_{ab}, P_{ac} y Q_{ac}. Repitiendo esta operación para los vértices B y C, resultarán ocho puntos más P_{ba}, Q_{ba}, P_{bc} y Q_{bc} (proyectando B) y P_{ca}, Q_{ca}, P_{cb} y Q_{cb} (proyectando C). Se consideran también los excírculos y el incírculo, cuyos centros son I_a, I_b, I_c e I.



Demostrar que:

① Estos doce puntos se pueden agrupar en cuatro series concíclicas de seis puntos:

❶ $c_{ma} : P_{ab}P_{ac}P_{cb}P_{bc}Q_{ca}Q_{ba}$

❷ $c_{mb} : P_{bc}P_{ba}P_{ac}P_{ca}Q_{ab}Q_{cb}$

❸ $c_{mc} : P_{ca}P_{cb}P_{ba}P_{ab}Q_{ac}Q_{bc}$

❹ $c_{m} : Q_{ab}Q_{ac}Q_{ba}Q_{bc}Q_{ca}Q_{cb}$

② Si M_a, M_b, M_c y M son sus centros, éstos forman un sistema ortogonal (los tres pares de rectas que determinan son ortogonales) y, además, los lados (o prolongaciones) de cualquier triángulo con estos vértices corta al triángulo ABC en los puntos medios de sus lados.

③ Se define la circunferencia de Monge (también llamada circunferencia ortóptica) de tres circunferencias como la circunferencia que es ortogonal a las tres circunferencias dadas. Probar que cada una de estas circunferencias es la circunferencia de Monge de tres inscritas.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC, se puede determinar que:

$$\begin{cases} P_{ab} = (a : a-c : c) \\ Q_{ab} = (a : a+c : -c) \\ P_{ac} = (a : b : a-b) \\ Q_{ac} = (a : -b : a+b) \end{cases} \quad \begin{cases} P_{ba} = (b-c : b : c) \\ Q_{ba} = (b+c : b : -c) \\ P_{bc} = (a : b : b-a) \\ Q_{bc} = (-a : b : b+a) \end{cases} \quad \begin{cases} P_{ca} = (c-b : b : c) \\ Q_{ca} = (c+b : -b : c) \\ P_{cb} = (a : c-a : c) \\ Q_{cb} = (-a : c+a : c) \end{cases}$$

① Como la ecuación de una circunferencia general es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (ux+vy+wz)(x+y+z) = 0 \ (u,v,w \in \mathbb{R})$$

❶ Imponiendo que pase por los puntos P_{ab}, P_{ac} y P_{cb}, obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{(b-c)^2 - a^2}{4} \\ v = \dfrac{(a+c)^2 - b^2}{4} \\ w = \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[\left[(b-c)^2 - a^2\right]x + \left[(a+c)^2 - b^2\right]y + \left[(a+b)^2 - c^2\right]z\right](x+y+z) = 0$$

pudiéndose comprobar que esta circunferencia pasa por los otros tres puntos de esta serie, ya que sus coordenadas verifican su ecuación. Además, como el centro de una circunferencia es el conjugado de la recta del infinito respecto de ella, entonces, sus coordenadas vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b-c)^2 - a^2 & -c(-a+b+c) & -b(-a+b+c) \\ -c(-a+b+c) & (a+c)^2 - b^2 & a(-a+b+c) \\ -b(-a+b+c) & a(-a+b+c) & (a+b)^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b-c)^2 - a^2 & -c(-a+b+c) & -b(-a+b+c) \\ -c(-a+b+c) & (a+c)^2 - b^2 & a(-a+b+c) \\ -b(-a+b+c) & a(-a+b+c) & (a+b)^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

es decir:

$$M_a = (b+c : c-a : b-a)$$

❷ Imponiendo que pase por los puntos P_{bc}, P_{ba} y P_{ac}, obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{4} \\ v = \dfrac{(a-c)^2 - b^2}{4} \\ w = \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[\left[(b+c)^2-a^2\right]x+\left[(a-c)^2-b^2\right]y+\left[(a+b)^2-c^2\right]z\right](x+y+z)=0$$

pudiéndose comprobar que esta circunferencia pasa por los otros tres puntos de esta serie, ya que sus coordenadas verifican su ecuación. Además, como el centro de una circunferencia es el conjugado de la recta del infinito respecto de ella, entonces, sus coordenadas vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-(b+c)^2 & c(a-b+c) & -b(a-b+c) \\ c(a-b+c) & b^2-(a-c)^2 & a(a-b+c) \\ -b(a-b+c) & a(a-b+c) & c^2-(a+b)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-(b+c)^2 & c(a-b+c) & -b(a-b+c) \\ c(a-b+c) & b^2-(a-c)^2 & a(a-b+c) \\ -b(a-b+c) & a(a-b+c) & c^2-(a+b)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

es decir:

$$M_b=(c-b:a+c:a-b)$$

❸ Imponiendo que pase por los puntos P_{ca}, P_{cb} y P_{ba}, obtenemos que:

$$\begin{cases} u=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4} \\ v=\dfrac{(a+c)^2-b^2}{4} \\ w=\dfrac{(a-b)^2-c^2}{4} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[\left[(b+c)^2-a^2\right]x+\left[(a+c)^2-b^2\right]y+\left[(a-b)^2-c^2\right]z\right](x+y+z)=0$$

pudiéndose comprobar que esta circunferencia pasa por los otros tres puntos de esta serie, ya que sus coordenadas verifican su ecuación. Además, como el centro de una circunferencia es el conjugado de la recta del infinito respecto de ella, entonces, sus coordenadas vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-(b+c)^2 & -c(a+b-c) & b(a+b-c) \\ -c(a+b-c) & b^2-(a+c)^2 & a(a+b-c) \\ b(a+b-c) & a(a+b-c) & c^2-(a-b)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-(b+c)^2 & -c(a+b-c) & b(a+b-c) \\ -c(a+b-c) & b^2-(a+c)^2 & a(a+b-c) \\ b(a+b-c) & a(a+b-c) & c^2-(a-b)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

es decir:

$$M_c=(b-c:a-c:a+b)$$

❹ Imponiendo que pase por los puntos Q_{ab}, Q_{ac} y Q_{ba}, obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \dfrac{(b-c)^2 - a^2}{4} \\ v = \dfrac{(a-c)^2 - b^2}{4} \\ w = \dfrac{(a-b)^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos es:

$$4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[\left[(b-c)^2 - a^2\right]x + \left[(a-c)^2 - b^2\right]y + \left[(a-b)^2 - c^2\right]z\right](x+y+z) = 0$$

pudiéndose comprobar que esta circunferencia pasa por los otros tres puntos de esta serie, ya que sus coordenadas verifican su ecuación. Además, como el centro de una circunferencia es el conjugado de la recta del infinito respecto de ella, entonces, sus coordenadas vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2-(b-c)^2 & c(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & b^2-(a-c)^2 & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & a(a+b+c) & c^2-(a-b)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2-(b-c)^2 & c(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & b^2-(a-c)^2 & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & a(a+b+c) & c^2-(a-b)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

es decir:

$$M = (b+c : a+c : a+b)$$

② Como:

$$\begin{cases} M_a = (b+c : c-a : b-a) = \left(\dfrac{b+c}{2(-a+b+c)} : \dfrac{c-a}{2(-a+b+c)} : \dfrac{b-a}{2(-a+b+c)}\right) \\ M_b = (c-b : a+c : a-b) = \left(\dfrac{c-b}{2(a-b+c)} : \dfrac{a+c}{2(a-b+c)} : \dfrac{a-b}{2(a-b+c)}\right) \\ M_c = (b-c : a-c : a+b) = \left(\dfrac{b-c}{2(a+b-c)} : \dfrac{a-c}{2(a+b-c)} : \dfrac{a+b}{2(a+b-c)}\right) \\ M = (b+c : a+c : a+b) = \left(\dfrac{b+c}{2(a+b+c)} : \dfrac{a+c}{2(a+b+c)} : \dfrac{a+b}{2(a+b+c)}\right) \end{cases}$$

entonces:

☺ Las rectas MM_a y M_bM_c son perpendiculares, ya que sus puntos del infinito:

$$\begin{cases} (MM_a)_\infty = \left(\dfrac{a(b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)} : -\dfrac{ab}{(a+b+c)(-a+b+c)} : -\dfrac{ac}{(a+b+c)(-a+b+c)}\right) = (b+c : -b : -c) \\ (M_bM_c)_\infty = \left(\dfrac{a(b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)} : -\dfrac{ab}{(a-b+c)(a+b-c)} : \dfrac{ac}{(a-b+c)(a+b-c)}\right) = (b-c : -b : c) \end{cases}$$

coinciden con los puntos del infinito de las bisectrices interior y exterior correspondientes al vértice A y ambas bisectrices son perpendiculares. Además, como:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b+c & c-a & b-a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} c-b & a+c & a-b \\ b-c & a-c & a+b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

entonces, ambas rectas pasan el punto medio $W = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC.

😐 Las rectas MM_b y M_aM_c son perpendiculares, ya que sus puntos del infinito:

$$\begin{cases} (MM_b)_\infty = \left(-\dfrac{ab}{(a+b+c)(a-b+c)} : \dfrac{b(a+c)}{(a+b+c)(a-b+c)} : -\dfrac{bc}{(a+b+c)(a-b+c)}\right) = (-a : a+c : -c) \\ (M_aM_c)_\infty = \left(-\dfrac{ab}{(-a+b+c)(a+b-c)} : \dfrac{b(a-c)}{(-a+b+c)(a+b-c)} : \dfrac{bc}{(-a+b+c)(a+b-c)}\right) = (-a : a-c : c) \end{cases}$$

coinciden con los puntos del infinito de las bisectrices interior y exterior correspondientes al vértice B y ambas bisectrices son perpendiculares. Además, como:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ c-b & a+c & a-b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b+c & c-a & b-a \\ b-c & a-c & a+b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

entonces, ambas rectas pasan el punto medio $V = (1 : 0 : 1)$ del segmento AC.

☹ Las rectas MM_c y M_aM_b son perpendiculares, ya que sus puntos del infinito:

$$\begin{cases} (MM_c)_\infty = \left(-\dfrac{ac}{(a+b+c)(a+b-c)} : -\dfrac{bc}{(a+b+c)(a+b-c)} : \dfrac{c(a+b)}{(a+b+c)(a+b-c)}\right) = (-a : -b : a+b) \\ (M_aM_b)_\infty = \left(\dfrac{c}{(-a+b+c)(a-b+c)} : \dfrac{c}{(-a+b+c)(a-b+c)} : \dfrac{c}{(-a+b+c)(a-b+c)}\right) = (-a : b : a-b) \end{cases}$$

coinciden con los puntos del infinito de las bisectrices interior y exterior correspondientes al vértice C y ambas bisectrices son perpendiculares. Además, como:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b-c & a-c & a+b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & a+c & a-b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

entonces, ambas rectas pasan el punto medio $U = (1 : 1 : 0)$ del segmento AB.

③ En este apartado utilizaremos el hecho de que dos circunferencias secantes (O_1, r_1) y (O_2, r_2) son ortogonales si y sólo si la recta polar de O_1 respecto de (O_2, r_2) coincide con el eje radical de ambas circunferencias:

❶ Como:

$$(M) : 4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[\left[(b-c)^2 - a^2\right]x + \left[(a-c)^2 - b^2\right]y + \left[(a-b)^2 - c^2\right]z\right](x+y+z) = 0$$

entonces, la circunferencia (*M*) es la circunferencia de Monge de las tres circunferencias exinscritas al triángulo ABC, ya que:

☺ Como:

$$(I_a) : 4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[(a+b+c)^2x + (a+b-c)^2y + (a-b+c)^2z\right](x+y+z) = 0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (*M*) e (I_a) es la recta de ecuación:

$$(a^2 + ab + ac + 2bc)x + b(a+b-c)y + c(a-b+c)z = 0$$

y coincide con la recta polar de M respecto de (I_a) :

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b+c)^2 & (a+b)^2 - c^2 & (a+c)^2 - b^2 \\ (a+b)^2 - c^2 & (a+b-c)^2 & (b-c)^2 - a^2 \\ (a+c)^2 - b^2 & (b-c)^2 - a^2 & (a-b+c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0 = (a^2 + ab + ac + 2bc)x + b(a+b-c)y + c(a-b+c)z$$

😐 Como:

$$(I_b) : 4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[(a+b-c)^2x + (a+b+c)^2y + (-a+b+c)^2z\right](x+y+z) = 0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (*M*) e (I_b) es la recta de ecuación:

$$a(-a+b+c)x + (b^2 + ab + bc + 2ac)y + c(a+b-c)z = 0$$

y coincide con la recta polar de M respecto de (I_b) :

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b-c)^2 & (a+b)^2 - c^2 & (a-c)^2 - b^2 \\ (a+b)^2 - c^2 & (a+b+c)^2 & (b+c)^2 - a^2 \\ (a-c)^2 - b^2 & (b+c)^2 - a^2 & (-a+b+c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0 = a(-a+b+c)x + (b^2 + ab + bc + 2ac)y + c(a+b-c)z$$

☹ Como:

$$(I_c) : 4(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - \left[(a-b+c)^2x + (-a+b+c)^2y + (a+b+c)^2z\right](x+y+z) = 0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (*M*) e (I_c) es la recta de ecuación:

$$a(a-b+c)x + b(-a+b+c)y + (c^2 + bc + ac + 2ab)z = 0$$

y coincide con la recta polar de M respecto de (I_c) :

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a-b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a+c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (-a+b+c)^2 & (b+c)^2-a^2 \\ (a+c)^2-b^2 & (b+c)^2-a^2 & (a+b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0=a(a-b+c)x+b(-a+b+c)y+(c^2+bc+ac+2ab)z$$

❷ Como:

$$(M_a):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[\left[(b-c)^2-a^2\right]x+\left[(a+c)^2-b^2\right]y+\left[(a+b)^2-c^2\right]z\right](x+y+z)=0$$

entonces, la circunferencia (M_a) es la circunferencia de Monge de la circunferencia inscrita al triángulo ABC y de las circunferencias exinscritas correspondientes a los vértices B y C de dicho triángulo, ya que:

☺ Como:

$$(I):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(-a+b+c)^2x+(a-b+c)^2y+(a+b-c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_a) e (I) es la recta de ecuación:

$$-(a^2-ab-ac+2bc)x+b(a-b+c)y+c(a+b-c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_a respecto de (I):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-a+b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a-c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (a-b+c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a-c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a+b-c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+c \\ c-a \\ b-a \end{pmatrix}$$

$$0=-(a^2-ab-ac+2bc)x+b(a-b+c)y+c(a+b-c)z$$

😐 Como:

$$(I_b):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a+b-c)^2x+(a+b+c)^2y+(-a+b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_a) e (I_b) es la recta de ecuación:

$$a(a+b-c)x+b(a+b+c)y+(c^2-ac+bc-2ab)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_a respecto de (I_b):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+b-c)^2 & (a+b)^2-c^2 & (a-c)^2-b^2 \\ (a+b)^2-c^2 & (a+b+c)^2 & (b+c)^2-a^2 \\ (a-c)^2-b^2 & (b+c)^2-a^2 & (a-b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+c \\ c-a \\ b-a \end{pmatrix}$$

$$0=a(a+b-c)x+b(a+b+c)y+(c^2-ac+bc-2ab)z$$

☹ Como:

$$(I_c) : 4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a-b+c)^2x+(-a+b+c)^2y+(a+b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_a) e (I_c) es la recta de ecuación:

$$a(a-b+c)x+(b^2-ab+bc-2ac)y+c(a+b+c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_a respecto de (I_c):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a-b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a+c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (-a+b+c)^2 & (b+c)^2-a^2 \\ (a+c)^2-b^2 & (b+c)^2-a^2 & (a+b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+c \\ c-a \\ b-a \end{pmatrix}$$
$$0=a(a-b+c)x+(b^2-ab+bc-2ac)y+c(a+b+c)z$$

❸ Como:

$$(M_b) : 4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[\left[(b+c)^2-a^2\right]x+\left[(a-c)^2-b^2\right]y+\left[(a+b)^2-c^2\right]z\right](x+y+z)=0$$

entonces, la circunferencia (M_b) es la circunferencia de Monge de la circunferencia inscrita al triángulo ABC y de las circunferencias exinscritas correspondientes a los vértices A y C de dicho triángulo, ya que:

☺ Como:

$$(I) : 4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(-a+b+c)^2x+(a+b-c)^2y+(a-b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_b) e (I) es la recta de ecuación:

$$a(-a+b+c)x-(b^2-ab-ac+2ac)y+c(a+b-c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_b respecto de (I):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-a+b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a-c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (a-b+c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a-c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a+b-c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c-b \\ a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$
$$0=a(-a+b+c)x-(b^2-ab-ac+2ac)y+c(a+b-c)z$$

😐 Como:

$$(I_a) : 4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a+b+c)^2x+(a+b-c)^2y+(a-b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_b) e (I_a) es la recta de ecuación:

$$a(a+b+c)x+b(a+b-c)y+(c^2+ac-bc-2ab)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_b respecto de (I_a):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+b+c)^2 & (a+b)^2-c^2 & (a+c)^2-b^2 \\ (a+b)^2-c^2 & (a+b-c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a+c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a-b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c-b \\ a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$0=a(a+b+c)x+b(a+b-c)y+(c^2+ac-bc-2ab)z$$

☹ Como:

$$(I_c):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a-b+c)^2x+(-a+b+c)^2y+(a+b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_b) e (I_c) es la recta de ecuación:

$$(a^2-ab+ac-2bc)x+b(-a+b+c)y+c(a+b+c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_b respecto de (I_c):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a-b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a+c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (-a+b+c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a+c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a+b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c-b \\ a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$0=(a^2-ab+ac-2bc)x+b(-a+b+c)y+c(a+b+c)z$$

❹ Como:

$$(M_c):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[\left[(b+c)^2-a^2\right]x+\left[(a+c)^2-b^2\right]y+\left[(a-b)^2-c^2\right]z\right](x+y+z)=0$$

entonces, la circunferencia (M_c) es la circunferencia de Monge de la circunferencia inscrita al triángulo ABC y de las circunferencias exinscritas correspondientes a los vértices A y B de dicho triángulo, ya que:

☺ Como:

$$(I):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(-a+b+c)^2x+(a+b-c)^2y+(a-b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_c) e (I) es la recta de ecuación:

$$a(-a+b+c)x+b(a-b+c)y-(c^2-ac-bc+2ab)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_c respecto de (I):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-a+b+c)^2 & (a-b)^2-c^2 & (a-c)^2-b^2 \\ (a-b)^2-c^2 & (a-b+c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a-c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a+b-c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-c \\ a-c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0=a(-a+b+c)x+b(a-b+c)y-(c^2-ac-bc+2ab)z$$

😐 Como:

$$(I_a):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a+b+c)^2x+(a+b-c)^2y+(a-b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_c) e (I_a) es la recta de ecuación:

$$a(a+b+c)x+(b^2+ab-bc-2ac)y+c(a-b+c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_c respecto de (I_a):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+b+c)^2 & (a+b)^2-c^2 & (a+c)^2-b^2 \\ (a+b)^2-c^2 & (a+b-c)^2 & (b-c)^2-a^2 \\ (a+c)^2-b^2 & (b-c)^2-a^2 & (a-b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-c \\ a-c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0=a(a+b+c)x+(b^2+ab-bc-2ac)y+c(a-b+c)z$$

☹ Como:

$$(I_b):4(a^2yz+b^2xz+c^2xy)-\left[(a+b-c)^2x+(a+b+c)^2y+(-a+b+c)^2z\right](x+y+z)=0$$

entonces, el eje radical entre las circunferencias (M_c) e (I_b) es la recta de ecuación:

$$(a^2+ab-ac-2bc)x+b(a+b+c)y+c(-a+b+c)z=0$$

y coincide con la recta polar de M_c respecto de (I_b):

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+b-c)^2 & (a+b)^2-c^2 & (a-c)^2-b^2 \\ (a+b)^2-c^2 & (a+b+c)^2 & (b+c)^2-a^2 \\ (a-c)^2-b^2 & (b+c)^2-a^2 & (-a+b+c)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-c \\ a-c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$0=(a^2+ab-ac-2bc)x+b(a+b+c)y+c(-a+b+c)z$$