

Problema 897.

Dado un triángulo ABC , proyectamos el vértice A sobre las bisectrices (interior y exterior) de B (y de C) obteniendo, respectivamente los 4 puntos P_{ab} , Q_{ab} , P_{ac} y Q_{ac} . Repitiendo esta operación para los vértices B y C resultarían 8 puntos más, P_{ba} , Q_{ba} , P_{bc} y Q_{bc} (proyectando B) y P_{ca} , Q_{ca} , P_{cb} y Q_{cb} (proyectando C). Nombremos también a los incírculos como Exa , Exb , Exc e In .

Demostrar:

A. Estos 12 puntos se pueden agrupar en 4 series concíclicas de 6 puntos: $cma: P_{ab}P_{ac}P_{cb}P_{bc}Q_{ca}Q_{ba}$, $cmb: P_{bc}P_{ba}P_{ac}P_{ca}Q_{ab}Q_{cb}$, $cmc: P_{ca}P_{cb}P_{ba}P_{ab}Q_{ac}Q_{bc}$ y $cm: Q_{ab}Q_{ac}Q_{ba}Q_{bc}Q_{ca}Q_{cb}$.

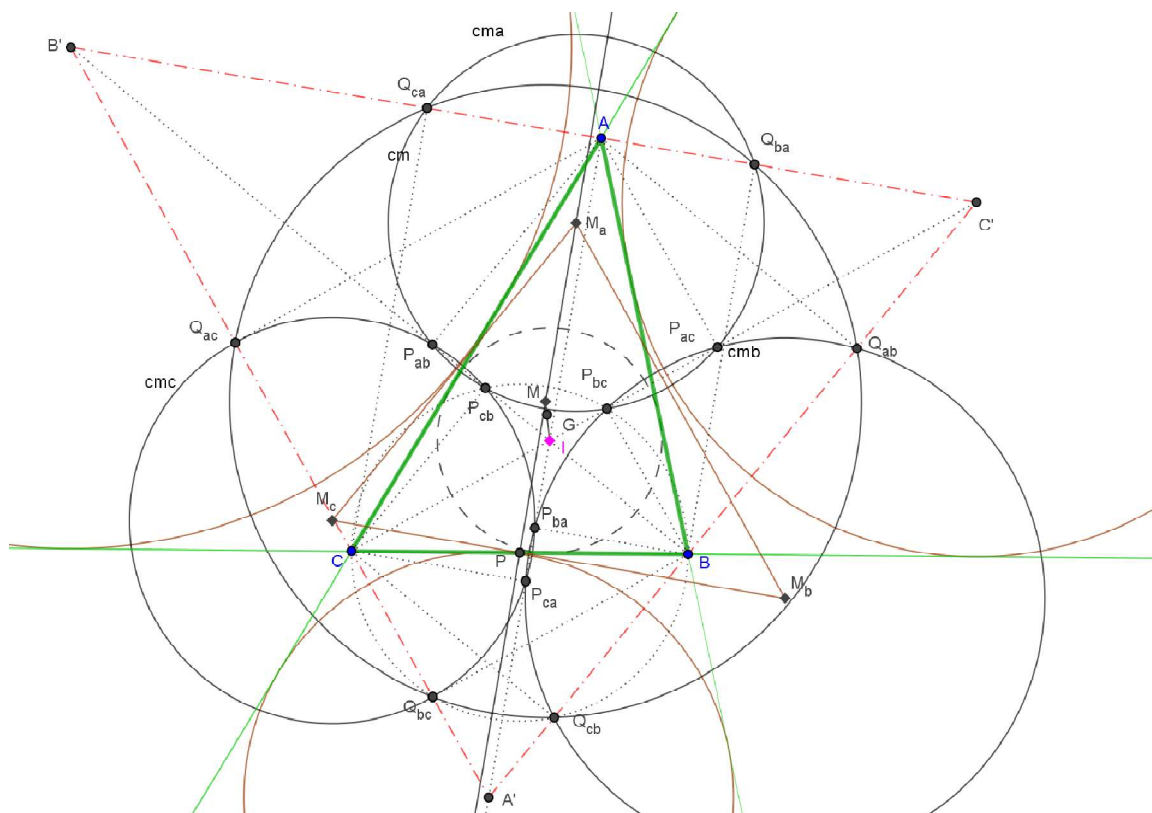
B. Cada uno de estos círculos es la circunferencia de Monge (ortogonal) de 3 inscritas. Así cm corta ortogonalmente a Exa , Exb y Exc , cma corta a Exb , Exc e In , etc.

C. Si M_a , M_b , M_c y M son sus centros, estos forman un sistema ortogonal y además los lados (o prolongaciones) de cualquier triángulo con esos vértices corta al ABC en los puntos medios de sus lados.

Beade, C. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Las bisectrices interior y exterior son perpendiculares entre sí, por ello podemos enunciar las definiciones de los puntos en términos de paralelismo, dando así un enfoque más proyectivo y menos métrico del problema. Claro está que en este caso, las circunferencias no tienen porque ser tales; en su lugar podremos tener otro tipo de cónicas.



En todo caso nos limitaremos al campo métrico y usaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC . Por comodidad llamaremos A' , B' y C' a los excentros opuestos a los vértices A , B y C respectivamente. Además de las ecuaciones de las rectas pondremos también las

coordenadas del punto del infinito de cada una.

El número de puntos, rectas y otros objetos geométricos que hay que calcular es muy grande, por eso, para no cargar la lectura, usaremos estos objetos, como si ya los hubiéramos calculado, poniendo al final el proceso de cálculo seguido si se desea ver con más detalle.

Vayamos pues a cada parte

A) Se calcula la circunferencia que pasa por los tres primeros puntos y después se comprueba que también pasa por los tres siguientes. El centro se calcula mediante la intersección de las mediatrices de dos segmentos. Se tienen así

$$cma: a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(-(s - b)(s - c)x + s(s - b)y + s(s - c)z) = 0$$

cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & c(s - a) & b(s - a) \\ c(s - a) & -2s(s - b) & -a(s - a) \\ b(s - a) & -a(s - a) & -2s(s - c) \end{pmatrix}$$

y su centro $M_a = (b + c : c - a : -a + b)$

Para cmb tenemos

$$cmb: a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(s(s - a)x - (s - a)(s - c)y + s(s - c)z) = 0$$

y centro $M_b = (-b + c : c + a : a - b)$

Y para cmc

$$cmc: a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(s(s - a)x + s(s - b)y - (s - a)(s - b)z) = 0 \quad \text{y}$$

centro $M_c = (b - c : -c + a : a + b)$.

Y para cm finalmente se obtiene:

$$cmb: a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)((s - b)(s - c)x + (s - c)(s - a)y + (s - a)(s - b)z) = 0 \text{ centrada en } M(b + c : c + a : a + b).$$

B) Si dos circunferencias son ortogonales el eje radical de ambas es igual a la polar del centro de una de ellas respecto de la otra.

Veamos que ***cma es ortogonal a las excircunferencias de ABC.***

a) La ecuación de la circunferencia excentral de B es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - c)^2x + s^2y + (s - a)^2z) = 0$$

Igualando las ecuaciones de las circunferencias cma y la de centro B' (excentro B') se obtiene el eje radical de ambas, que es la recta

$$cmab: a(s - c)x + bsy + (cs - a(b + c))z = 0$$

Ahora calculamos la polar del excentro (B'), respecto de cma

$$\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & c(s - a) & b(s - a) \\ c(s - a) & -2s(s - b) & -a(s - a) \\ b(s - a) & -a(s - a) & -2s(s - c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2(s - b)} \\ -b \\ \frac{2(s - b)}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(s - c) \\ bs \\ cs - a(b + c) \end{pmatrix}$$

Por tanto, cma y la circunferencia excentral de B son ortogonales.

b) La ecuación de la circunferencia excentral de C es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - b)^2x + (s - a)^2y + s^2z) = 0$$

El eje radical de cma y $Ex(C)$ se obtiene restando las dos ecuaciones. Resulta la recta

$$a(s - b)x + (a^2 - 2as + bs)y + csz = 0$$

Ahora la polar

$$\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & c(s - a) & b(s - a) \\ c(s - a) & -2s(s - b) & -a(s - a) \\ b(s - a) & -a(s - a) & -2s(s - c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2(s - c)} \\ \frac{b}{2(s - c)} \\ \frac{-c}{2(s - c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(s - b) \\ a^2 - 2as + bs \\ cs \end{pmatrix}$$

También son ortogonales.

c) Ahora pruebo con la circunferencia inscrita, su ecuación es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)((s - a)^2x + (s - b)^2y + (s - c)^2z) = 0$$

La polar del incentro de A es

$$\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & c(s - a) & b(s - a) \\ c(s - a) & -2s(s - b) & -a(s - a) \\ b(s - a) & -a(s - a) & -2s(s - c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2s} \\ \frac{b}{2s} \\ \frac{c}{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc - a(s - a) \\ b(b - s) \\ c(c - s) \end{pmatrix}$$

El eje radical con cma es $(bc - a(s - a))x - b(s - b)y - c(s - c)z = 0$

También son ortogonales.

Es similar en los demás casos. Con cm es algo diferente, pero se limita a hacer el mismo tipo de cálculo.

d) Ecuación de cm y de la excentral de A :

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)((s - b)(s - c)x + (s - c)(s - a)y + (s - a)(s - b)z) = 0$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(s^2x + (s - c)^2y + (s - b)^2z) = 0$$

El eje radical es la recta $(as + bc)x + b(s - c)y + c(s - b)z = 0$

La polar de A' respecto de cm es

$$\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & cs & bs \\ cs & 2(s - c)(s - a) & as \\ bs & as & 2(s - a)(s - c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-a}{2(s - a)} \\ \frac{b}{2(s - a)} \\ \frac{c}{2(s - a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + bc \\ b(s - c) \\ c(s - b) \end{pmatrix}$$

Por tanto, son ortogonales.

E igualmente el resto.

C) Para probar que M_a , M_b , M_c y M forman un sistema ortogonal demostraremos que forman un cuadrilátero homotético al formado por los excentros y el incentro.

- El triángulo $M_aM_bM_c$ es homotético a ABC .

Por construcción los lados del triángulo M_a , M_b , M_c son paralelos a los del triángulo formado por

los excentros, por tanto, esos triángulos son homotéticos.

Vamos a calcular la razón de homotecia.

$$\text{El vector } M_a M_b = \frac{1}{4(s-b)} M_b - \frac{1}{4(s-a)} M_a = \frac{1}{4(s-b)} (-b+c:c+a:a-b) - \frac{1}{4(s-a)} (b+c:c-a:-a+b) = \frac{c}{4(s-a)(s-b)} (-a:b:a-b).$$

$$\text{El vector } A'B' = \frac{1}{2(s-b)} (a:-b:c) - \frac{1}{2(s-a)} (-a:b:c) = \frac{1}{2(s-a)(s-b)} (a(s-a+s-b):b(-s+a-s+b):c(s-a-s+b)) = \frac{1}{2(s-a)(s-b)} (ac:bc:(b-a)c) = \frac{c}{2(s-a)(s-b)} (a:b:b-a).$$

De esos cálculos se deduce que la razón de homotecia es -2.

Si demostramos que, por ejemplo, $\overrightarrow{2MM_a} = \overrightarrow{A'I}$, donde I es el incentro de A habremos demostrado que M es el ortocentro del triángulo $M_a M_b M_c$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{2MM_a} &= \frac{1}{2(s-a)} (b+c:c-a:-a+b) - \frac{1}{2s} (b+c:c+a:a+b) \\ &= \frac{a}{2s(s-a)} (b+c:-b:-c) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{2s} (a,b,c) - \frac{1}{2(s-a)} (-a,b,c) = \frac{a}{2s(s-a)} (b+c:-b:-c) = \overrightarrow{2MM_a}.$$

Es fácil comprobar que el baricentro G de ABC es el centro de esta homotecia. Este punto está alineado con M y con I (compruébese) y se verifica $3MG = MI$.

-Intersecciones de $M_a M_b M_c$ y ABC .

La recta $M_a M_b$ es la de ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -b+c & c+a & a-b \\ b+c & c-a & -a+b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (b-a)x + (a-b)y - (a+b)z = 0$$

Se encuentra con el lado AB del triángulo (de ecuación $z = 0$) en el punto $(1:1:0)$ que es el punto medio del mismo.

La recta MM_a de ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b+c & c+a & a+b \\ b+c & c-a & -a+b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (c-b)x - (c+b)y + (c+b)z = 0$$

corta a la recta BC (de ecuación $x = 0$) en el punto $(0:1:1)$ también su punto medio. Y así las demás.

CÁLCULOS DEL PROBLEMA

Tenemos así las siguientes ecuaciones:

Bisectrices interiores:

AA' : $cy = bz$, y su punto del infinito $(b+c, -b, -c)$; BB' : $az = cx$ y el punto del infinito $(-a, a+c, -c)$; CC' : $bx = ay$, y el punto del infinito $(-a, -b, a+b)$

Bisectrices exteriores

$B'C'$: $bz + cy = 0$ y el punto del infinito $(c-b, b, -c)$; $C'A'$: $az + cx = 0$ y el punto del infinito $(a, c-a, -c)$; $A'B'$: $bx + ay = 0$ y en el infinito el punto $(a: -b: b-a)$.

A partir de estos datos vamos a calcular las coordenadas de los puntos.

1) Desde A se traza la paralela a $A'C'$ que corta a BB' en P_{ab} :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & c-a & -c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap az = cx; P_{ab}(a: a-c: c)$$

2) Desde C se traza una paralela a $A'C'$ que corta a BB' en P_{cb} :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & c-a & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cap az = cx; P_{cb}(a: c-a: c)$$

3) Desde A se traza la paralela a $A'B'$ que corta a CC' en P_{ac}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & b-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap ay = bx; P_{ac}(a: b: a-b)$$

4) Desde B se traza una paralela a $A'B'$ que corta a CC' en P_{bc}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap ay = bx; P_{bc}(a: b: b-a)$$

5) Desde C se traza la paralela a AA' que corta a $B'C'$ en Q_{ca}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b+c & -b & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cap bz = -cy; Q_{ca}(b+c: -b: c)$$

6) Desde B se traza una paralela a AA' que corta a $B'C'$ en Q_{ba}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b+c & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap bz = -cy; Q_{ba}(b+c: b: -c)$$

7) Desde C se traza una paralela a BB' que corta a $A'C'$ en Q_{cb}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & a+c & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cap az = -cx; Q_{cb}(-a: a+c: c)$$

8) Desde A trazo la paralela a BB' que corta a $A'C'$ en Q_{ab}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & a+c & -c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap az = -cx; Q_{ab}(a: a+c: -c)$$

9) Desde B se traza una paralela a CC' que corta a $A'B'$ en Q_{bc}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & -b & a+b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap ay = -bx; Q_{bc}(-a: b: a+b)$$

10) Desde A trazo una paralela a CC' que corta a $A'B'$ en Q_{ac}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & -b & a+b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap ay = -bx; Q_{ac}(a: -b: a+b)$$

11) Desde C se traza una paralela a $B'C'$ que corta a AA' en P_{ca}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cap bz = cy; P_{ca}(c-b: b: c)$$

12) Desde B se traza una paralela a $B'C'$ que corta a AA' en P_{ba}

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cap bz = cy; P_{ba}(b-c: b: c)$$

13) El centro de cma ha de estar en la intersección de las mediatrices de los segmentos $P_{ab}P_{cb}$ y $P_{ac}P_{bc}$.

El punto medio de $P_{ab}P_{cb}$ es $cP_{ab} + aP_{cb} = (a(a+c): -(a-c)^2: c(a+c))$ y tiene en el infinito el punto $(a: c-a: -c)$, por tanto su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & c-a & -c \\ a(a+c) & -(a-c)^2 & c(a+c) \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación de esta mediatriz es $(a-c)x + (a+c)y - (a-c)z = 0$

El punto medio de $P_{ac}P_{bc}$ es $bP_{ac} + cP_{bc} = (a(b+a): b(b+a): -(a-b)^2)$ y el punto del infinito de $A'B'$ es $(a: -b: b-a)$, por tanto la mediatriz de $P_{ac}P_{bc}$ viene dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & b-a \\ a(b+a) & b(b+a) & -(a-b)^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } (a-b)x + (b-a)y + (a+b)z = 0.$$

La intersección de estas dos mediatrices es el punto $M_a = (b+c: c-a: -a+b)$

14) El centro de cmb se obtiene de la intersección de la recta anterior con la mediatriz de $P_{ba}P_{ca}$.

El punto medio de este segmento es $cP_{ba} + bP_{ca} = (-(b-c)^2: b(b+c): c(b+c))$ y además ha de pasar por el punto del infinito de $B'C'$, el punto $(c-b: b: -c)$, por tanto su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ -(b-c)^2 & b(b+c) & c(b+c) \end{vmatrix} = 0, \text{ que equivale a, } (b+c)x + (b-c)y - (b-c)z = 0$$

Resolviendo con la anterior resulta el punto $M_b = (-b+c: c+a: a-b)$

15) Para hallar el centro de cmc tenemos que hallar el punto común de las mediatrices de $P_{ab}P_{cb}$ y de $P_{ba}P_{ca}$ ya calculadas antes. Se obtiene el punto $M_c = (b-c: -c+a: a+b)$.

16) Para hallar el centro de cm tenemos que calcular las mediatrices de los segmentos $Q_{ba}Q_{ca}$ y

$Q_{ab}Q_{cb}$. Los puntos medios respectivos son $cQ_{ba} + bQ_{ca} = ((b+c)^2: -b(b-c): c(b-c))$ y $cQ_{ab} + aQ_{cb} = (-a(a-c): (a+c)^2: c(a-c))$.

La primera es paralela a AA' , por tanto ha de pasar por el punto $(c+b: -b: c)$ y la segunda, paralela a BB' , pasará por $(-a: a+c: -c)$. Por tanto sus ecuaciones son

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b+c & -b & -c \\ (b+c)^2 & -b(b-c) & c(b-c) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (b-c)x + (b+c)y - (b+c)z = 0, \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & a+c & -c \\ -a(a-c) & (a+c)^2 & c(a-c) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a+c)x + (a-c)y - (a+c)z = 0.$$

Resolviendo este sistema se obtiene $M = (b+c: c+a: a+b)$.

17) Para ver si los puntos $P_{ab}P_{ac}P_{cb}P_{bc}Q_{ca}Q_{ba}$ están sobre una circunferencia hallamos la ecuación de la que pasa por tres de ellos y luego comprobamos si los otros tres la verifican.

Sea $\Gamma(x, y, z) = a^2yz + b^2zx + c^2xy$ la expresión de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC . Cualquier otra circunferencia tiene una ecuación de la forma

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de los tres primeros resulta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} ac(a^2 + b^2 - c^2) - [a + (a - c) + c](a\alpha + (a - c)\beta + c\gamma) &= 0 \\ ac(-a^2 + b^2 + c^2) - [a + (c - a) + c](a\alpha + (c - a)\beta + c\gamma) &= 0 \\ ab(-a^2 + b^2 + c^2) - [a + b + (b - a)](a\alpha + b\beta + (b - a)\gamma) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo en α, β y γ obtenemos la **ecuación de esta primera circunferencia cma**:

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(-(s - b)(s - c)x + s(s - b)y + s(s - c)z) = 0$$

La matriz asociada a esta circunferencia es $\begin{pmatrix} 2(s - b)(s - c) & c(s - a) & b(s - a) \\ c(s - a) & -2s(s - b) & -a(s - a) \\ b(s - a) & -a(s - a) & -2s(s - c) \end{pmatrix}$

Omitimos aquí la comprobación de la pertenencia a la misma de los tres puntos restantes.

De forma absolutamente idéntica, pero ahora con los puntos $P_{bc}P_{ba}P_{ac}P_{ca}Q_{ab}Q_{cb}$

Obtenemos la **ecuación de la circunferencia cmb**

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(s(s - a)x - (s - a)(s - c)y + s(s - c)z) = 0$$

Y para **cmc**

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(s(s - a)x + s(s - b)y - (s - a)(s - b)z) = 0$$

Y para **cm finalmente se obtiene**:

$$\Gamma(x, y, z) + (x + y + z)((s - b)(s - c)x + (s - c)(s - a)y + (s - a)(s - b)z) = 0 \blacksquare$$