

Pr. Cabri 898

Enunciado

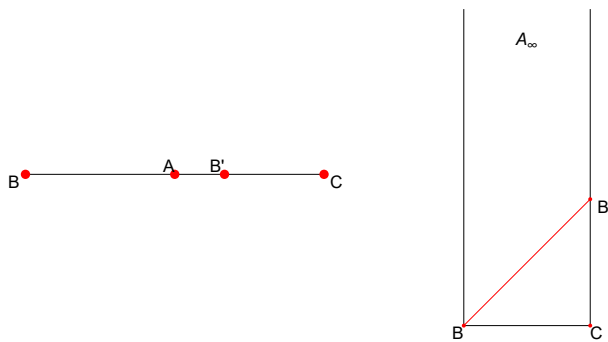
Se elige un punto, al azar, sobre un segmento rectilíneo de longitud 1. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando uno de los dos segmentos como base y el otro como bisectriz de uno de los dos ángulos iguales, de la base?

Gallego-Díaz, J. (1965): Nuevos problemas de matemáticas. Editorial Norte Y Sur. (p. 70)

Solución

de César Beade Franco

Si BC es la base, la bisectriz desde cualquiera de sus vértices forma con la base un ángulo de 0° a 45° como se ve en el dibujo, situaciones que se alcanzan cuando el triángulo “degenera”, bien en una línea o en uno con dos lados paralelos.



En el primer caso la proporción entre BB' (bisectriz) y BC (lado) es 2 a 3. Esta proporción es creciente hasta alcanzar $\sqrt{2}$ en el segundo caso.

Si $BB' = x$, entonces $BC = 1 - x$, de donde $x = \frac{2}{3}(1 - x) \Rightarrow x = \frac{2}{5}$, en el primer caso. En el segundo, $x^2 = 2(1 - x)^2 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}$. Así que $x \in (\frac{2}{5}, 2 - \sqrt{2})$.

Claro que podemos intercambiar los valores de x y $x - 1$. Así $x \in (\sqrt{2} - 1, \frac{3}{5})$.

Combinando ambos resultados, $x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, con lo que la probabilidad pedida es $\frac{1}{5}$.

Para los valores $x \in (\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$ pueden construirse dos triángulos distintos, con las longitudes de lado y bisectriz intercambiadas.

Cuando el ángulo de la base es de $\frac{2\pi}{5}$ rad, lado y bisectriz son iguales.