

Problema 898.-

Se elige un punto, al azar, sobre un segmento rectilíneo de longitud 1. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando uno de los dos segmentos como base y el otro como bisectriz de uno de los dos ángulos iguales de la base?

Gallego - Díaz, J. (1965): *Nuevos problemas de matemáticas*. Editorial Norte y Sur. (p.70)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Lema 1.-

Sea dado un segmento AB, de longitud 1.

Sea además un segmento BB' de longitud $(\frac{1}{2} + t)$; $\forall t \in \mathbb{R}; \frac{1}{6} < t < \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2})$.

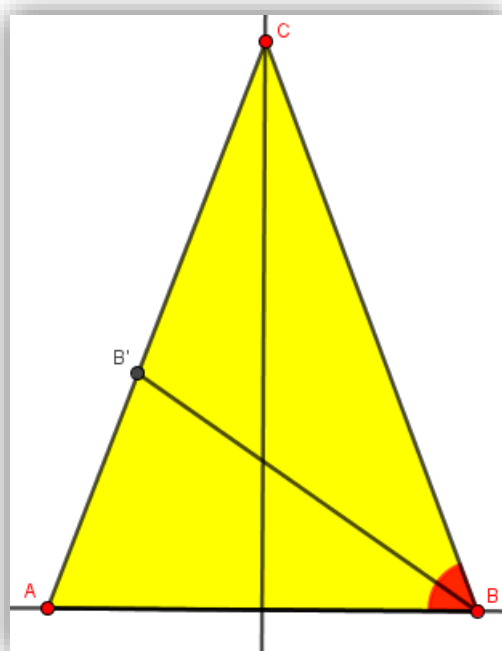
Entonces se puede construir un triángulo isósceles utilizando AB como base y BB' como bisectriz de los ángulos iguales de la base.

Dem.-

Consideramos en el plano el sistema de referencia con los elementos siguientes:

$\{O = B = (0,0), E_{jex} \equiv \text{Recta AB}, E_{jey} \equiv \text{Recta } \perp \text{ Eje } x \text{ por el punto B}\}$.

En este sistema, tendremos que:



$$A = (-1,0),$$

$$B = (0,0),$$

$$B' = \left(-\left(\frac{1}{2} + t\right) \cos[\alpha], \left(\frac{1}{2} + t\right) \sin[\alpha] \right),$$

siendo $\alpha = \angle B'BA$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Recta BC $\rightarrow$ (simétrica de AB: $y = 0$, respecto de BB')
 $y = -\tan[2\alpha] \cdot x$

Recta AC $\rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2} + t\right) \sin[\alpha](x + 1) + \left(\left(\frac{1}{2} + t\right) \cos[\alpha] - 1\right)y = 0$$

Punto C: Punto de Intersección de ambas rectas BC y AC.

$$C = \left(\frac{((1+2t)\cos[2\alpha])}{1+2t-4\cos[\alpha]}, \frac{(1+2t)\sin[2\alpha]}{-1-2t+4\cos[\alpha]} \right)$$

Como el punto C debe pertenecer a la mediatriz de AB, entonces

$$x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{(1+2t)\cos[2\alpha]}{1+2t-4\cos[\alpha]} = -\frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{-1+4\cos[\alpha]-2\cos[2\alpha]}{2+4\cos[2\alpha]}$$

Esto querrá decir que si $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ entonces deberá ser $0 < t$.

Si consideramos la función $f(x) = \frac{-1+4\cos[x]-2\cos[2x]}{2+4\cos[2x]}$, tenemos que para $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ es una función continua y derivable. $f(0) = \frac{1}{6}$ y $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2})$.

Como quiera que $f'(x) = \frac{2(3+2\cos[2x])\sin[x]}{(1+2\cos[2x])^2} > 0 \rightarrow \text{Entonces para } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$

En definitiva, se puede construir un triángulo isósceles utilizando $AB = 1$ como base y BB' como bisectriz de los ángulos iguales de la base BB' de longitud $(\frac{1}{2} + t)$; $\forall t \in R$; $\frac{1}{6} < t < \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2})$.

Lema 2.-

El valor p de dicha probabilidad sería $p = \frac{1}{5}$.

Dem.-

Si el lado $AB = 1$, y llamamos $x = BB' = \text{longitud de la bisectriz}$, entonces la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando $1 - x$ como base y el otro como bisectriz x de uno de los dos ángulos iguales de la base se podrá determinar así, gracias al Lema 1 como:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)(1 - x) < x < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2})\right)(1 - x) \rightarrow \frac{2}{5} < x < 2 - \sqrt{2}.$$

En todo el desarrollo seguido hemos considerado el segmento BB' como la longitud de la bisectriz x , pero si usamos el otro sentido posible de la bisectriz, es decir, $AA' = x'$ hubiéramos llegado a que $\sqrt{2} - 1 < x' < \frac{3}{5}$.

Por tanto, la longitud y de la bisectriz, ya sea AA' o BB' , cumplirá que $y = x$ o bien $y = x'$.

Como quiera que se cumple que $\frac{2}{5} < \sqrt{2} - 1 < 2 - \sqrt{2} < \frac{3}{5}$, el valor p de dicha probabilidad será:

$$\frac{2}{5} < p < \frac{3}{5} \rightarrow p = \frac{1}{5}.$$