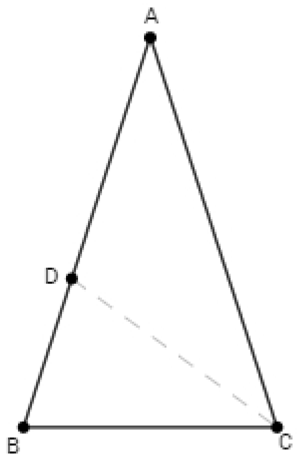
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 898. (Gallego Díaz, J. (1965), Nuevos problemas de Matemáticas, Editorial Norte y Sur, pág. 70) Se elige un punto al azar sobre un segmento rectilíneo de longitud unidad. Calcular la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando uno de los dos segmentos como base y el otro como bisectriz de uno de los dos ángulos iguales.

Solución:

Dado $a \in (0,1)$, si construimos un triángulo isósceles ABC con $b = c$, resulta que:

$$\begin{cases} S_A = \dfrac{2b^2 - a^2}{2} \\ S_B = S_C = \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$



Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC, como:

$$D = (a : b : 0) = \left(\frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b} : 0\right)$$

entonces:

$$(1-a)^2 = CD^2 = \left(\frac{2b^2 - a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 b(a+2b)}{(a+b)^2}$$

por lo que:

$$b = \frac{a\left(a\sqrt{5a^2 - 8a + 4} + a^2 - 4a + 2\right)}{2(a^2 + 2a - 1)}$$

y han de verificarse las dos siguientes condiciones:

① $b > 0$, en cuyo caso:

$$sig\left(a\sqrt{5a^2 - 8a + 4} + a^2 - 4a + 2\right) = sig(a^2 + 2a - 1)$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y como:

$$\left(a\sqrt{5a^2-8a+4}\right)^2-(a^2-4a+2)^2=4(a-1)^2(a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})=0$$

entonces:

$$a\sqrt{5a^2-8a+4}+a^2-4a+2=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\notin(0,1)\\ \text{ó}\\ a=-1-\sqrt{2}\notin(0,1)\end{cases}$$

por lo que:

$$\forall\ a\in(0,1): a\sqrt{5a^2-8a+4}+a^2-4a+2>0$$

y, por tanto:

$$b>0\Leftrightarrow a^2+2a-1>0\underset{0<a<1}{\Leftrightarrow}\sqrt{2}-1<a<1$$

② $2b-a>0$, en cuyo caso:

$$\frac{a\left[a\sqrt{5a^2-8a+4}-3(2a-1)\right]}{a^2+2a-1}>0\underset{a^2+2a-1>0}{\Rightarrow}a\sqrt{5a^2-8a+4}-3(2a-1)>0$$

y como:

$$\left(a\sqrt{5a^2-8a+4}\right)^2-[3(2a-1)]^2=(a-3)(5a-3)(a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})=0$$

entonces:

$$a\sqrt{5a^2-8a+4}-3(2a-1)=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=3\notin(0,1)\\ \text{ó}\\ a=\frac{3}{5}\in(0,1)\\ \text{ó}\\ a=-1-\sqrt{2}\notin(0,1)\end{cases}$$

y, por tanto:

$$a\sqrt{5a^2-8a+4}-3(2a-1)>0\Leftrightarrow 0<a<\frac{3}{5}$$

Finalmente, como:

$$\sqrt{2}-1<a<\frac{3}{5}$$

entonces, invirtiendo los papeles de a y $1-a$, resulta que:

$$\sqrt{2}-1<1-a<\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}<a<2-\sqrt{2}$$

por lo que la región favorable es:

$$\left(\sqrt{2}-1,\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5},2-\sqrt{2}\right)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$$

y, por tanto, la probabilidad pedida es:

$$p=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$