

Problema 898.

S'escull un punt a l'atzar, sobre un segment rectilini de longitud 1.

Calculeu la probabilitat que es pugui construir un triangle isòsceles utilitzant un dels dos segments com base i l'altre com bisectriu d'un dels angles iguals, de la base?

Gallego-Díaz, J. (1965): Nuevos problemas de matemáticas. Editorial Norte Y Sur. (p. 70)

Solució de Ricard Peiró:

Siga el segment $\overline{PQ} = 1$.

Siga $\overline{PK} = x$ base del triangle isòsceles $\triangle PKL$, $\overline{PL} = \overline{KL}$.

Siga $\overline{PD} = \overline{KQ} = 1 - x$ bisectriu de l'angle P.

Siga $\alpha = \angle DPK$, $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$.

Siga $\overline{PE}$ altura del triangle $\triangle PKL$.

$$\angle EPK = 90^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle DPE = |3\alpha - 90^\circ|.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle

rectangle $\triangle PEK$.

$$\overline{PE} = x \cdot \sin 2\alpha.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle

rectangle $\triangle PED$.

$$\overline{PD} = \frac{\overline{PE}}{\cos |3\alpha - 90^\circ|}.$$

$$\overline{PD} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} x.$$

$$\overline{PD} = \frac{2 \cos \alpha}{-1 + 4 \cos^2 \alpha} x = 1 - x.$$

Aïllant x:

$$x = \frac{-1 + 4 \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha - 1 + 4 \cos^2 \alpha}.$$

$$\cos \alpha \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right].$$

Considerem la funció:

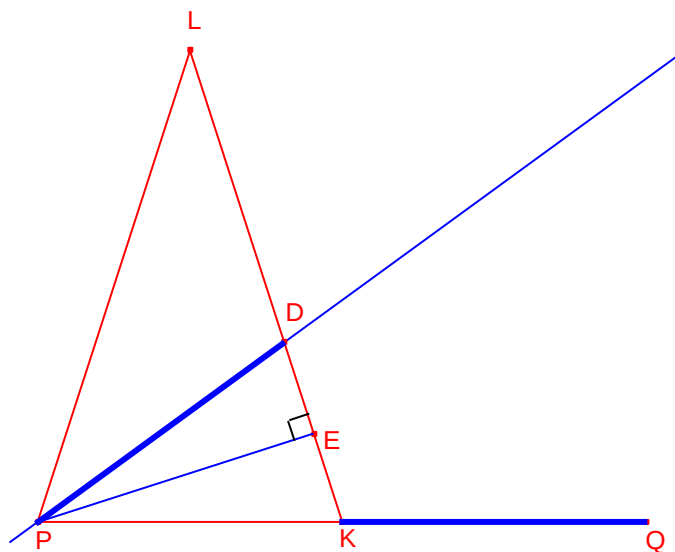
$$f(z) = \frac{-1 + 4z^2}{2z - 1 + 4z^2}, \quad z \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right].$$

$$f'(z) = \frac{8z^2 + 2}{(2z - 1 + 4z^2)^2} > 0.$$

La funció és creixent en el domini:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \frac{-1 + 4z^2}{2z - 1 + 4z^2} \leq f(1).$$

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{-1 + 4z^2}{2z - 1 + 4z^2} \leq \frac{3}{5}.$$



$$\sqrt{2}-1 \leq x \leq \frac{3}{5}, \text{ o bé } \sqrt{2}-1 \leq 1-x \leq \frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{2}-1 \leq x \leq \frac{3}{5}, \text{ o bé } \frac{2}{5} \leq 1-x \leq 2-\sqrt{2}.$$

$$x \in \left[\sqrt{2}-1, \frac{3}{5} \right] \cup \left[\frac{2}{5}, 2-\sqrt{2} \right] = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right]$$

La probabilitat que es pugui formar el triangle és:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$