Problema 898.

Se elige un punto, al azar, sobre un segmento rectilíneo de longitud 1. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando uno de los dos segmentos como base y el otro como bisectriz de uno de los dos ángulos iguales, de la base?

Gallego-Díaz, J. (1965): Nuevos problemas de matemáticas. Editorial Norte Y Sur. (p. 70)

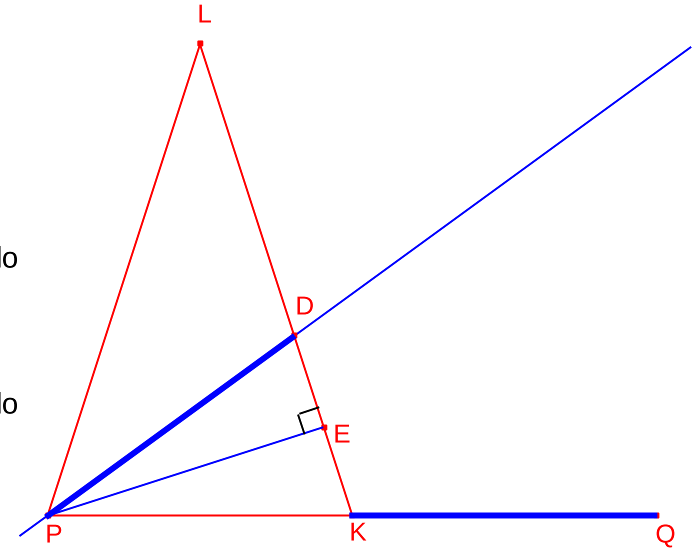
Solució de Ricard Peiró:

Sea el segmento $\overline{PQ}=1$.

Sea $\overline{PK}=x$ base del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{PKL}$, $\overline{PL}=\overline{KL}$.

Sea $\overline{PD}=\overline{KQ}=1-x$ bisectriz del ángulo P.

Sea $\alpha=\angle DPK$, $\alpha\in[0^o,45^o]$.



Sea $\overline{PE}$ altura del triángulo $\overset{\Delta}{PKL}$.

$\angle EPK=90^o-2\alpha$.

$\angle DPE=|3\alpha-90^o|$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PEK}$.

$\overline{PE}=x\cdot\sin 2\alpha$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PED}$.

$$\overline{PD}=\frac{\overline{PE}}{\cos|3\alpha-90^o|}.$$

$$\overline{PD}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}x.$$

$$\overline{PD}=\frac{2\cos\alpha}{-1+4\cos^2\alpha}x=1-x.$$

Despejando x:

$$x=\frac{-1+4\cos^2\alpha}{2\cos\alpha-1+4\cos^2\alpha}.$$

$$\cos\alpha\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right].$$

Consideremos la función:

$$f(z)=\frac{-1+4z^2}{2z-1+4z^2},\quad z\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right].$$

$$f'(z)=\frac{8z^2+2}{\left(2z-1+4z^2\right)}>0.$$

La función es creciente en el dominio:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leq\frac{-1+4z^2}{2z-1+4z^2}\leq f(1).$$

$\sqrt{2}-1 \leq x \leq \frac{3}{5}$, o bé $\sqrt{2}-1 \leq 1-x \leq \frac{3}{5}$.

$\sqrt{2}-1 \leq x \leq \frac{3}{5}$, o bé $\frac{2}{5} \leq 1-x \leq 2-\sqrt{2}$.

$x \in \left[\sqrt{2}-1, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, 2-\sqrt{2}\right] = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$

La probabilidad que se pueda formar el triángulo es:

$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0.2$.