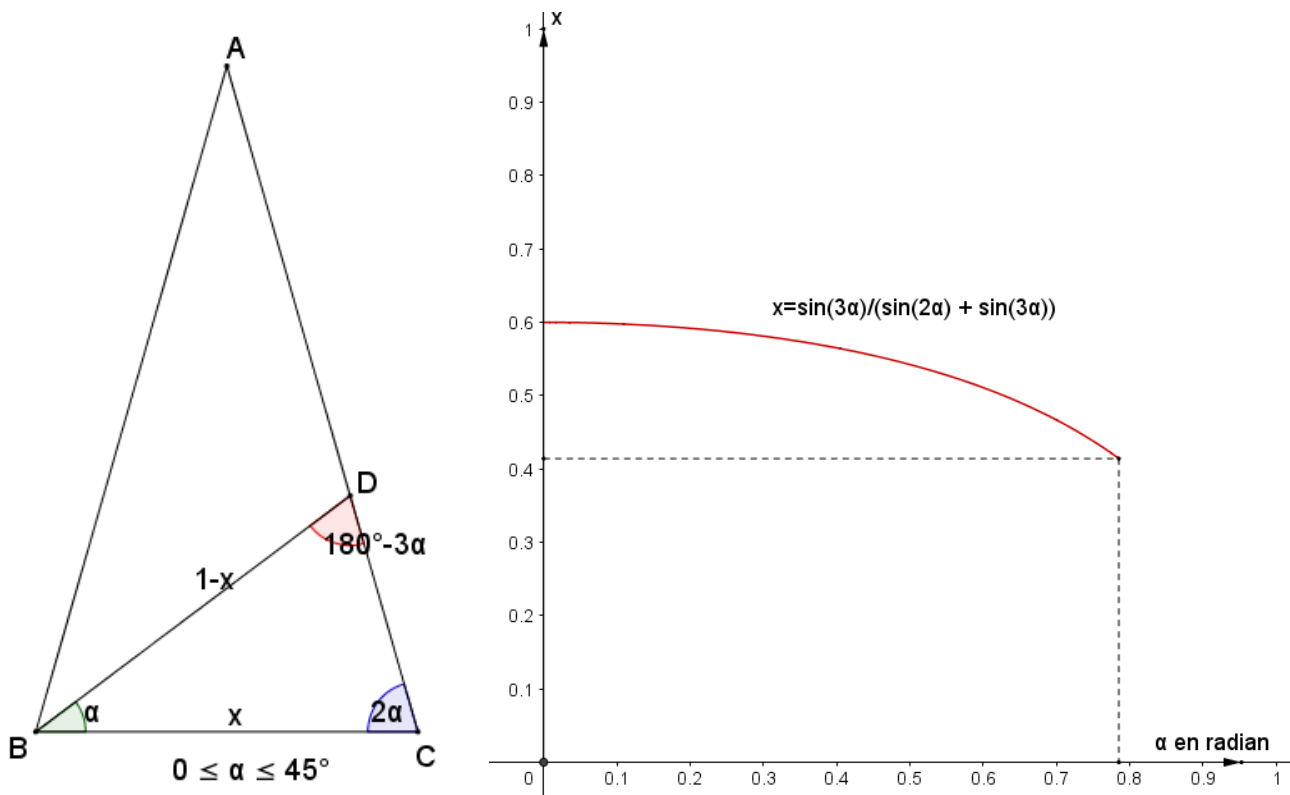


Problema 898

Se elige un punto, al azar, sobre un segmento rectilíneo de longitud 1. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda construirse un triángulo isósceles utilizando uno de los dos segmentos como base y el otro como bisectriz de uno de los dos ángulos iguales, de la base?

Gallego-Díaz, J. (1965): Nuevos problemas de matemáticas. Editorial Norte Y Sur. (p. 70)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit $BC = x$ la base du triangle ABC et $BD = 1 - x$ la longueur de la bissectrice de l'angle en B.

Soit $\alpha = \angle CBD$. D'où $\angle BCD = 2\alpha$ et $\angle BDC = 180^\circ - 3\alpha$.

Le triangle isocèle ABC est constructible si et seulement si $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$ ou encore $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ (en radian)

La loi des sinus dans le triangle BCD permet d'écrire : $x/\sin(180^\circ - 3\alpha) = (1 - x)/\sin(2\alpha)$

soit $x/\sin(3\alpha) = (1 - x)/\sin(2\alpha) = 1/(\sin(3\alpha) + \sin(2\alpha))$.

D'où $x = \sin(3\alpha) / (\sin(3\alpha) + \sin(2\alpha))$.

La courbe représentative de x en fonction de α compris dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ est donnée ci-dessus.

x est une fonction monotone décroissante de α et varie entre $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin(3\alpha) / (\sin(3\alpha) + \sin(2\alpha)) = \frac{3}{5}$ pour $\alpha \rightarrow 0$ et

$\sin(3\pi/4) / (\sin(3\pi/4) + \sin(\pi/2)) = \sqrt{2} - 1$ pour $\alpha = 45^\circ = \pi/4$

Il y a alors **deux réponses possibles** pour le calcul de la probabilité demandée:

1) Le point P est choisi au hasard sur le segment OO' de longueur unité et seul le segment OP peut servir de base au triangle isocèle. La probabilité pour que le triangle isocèle soit constructible est égale à la probabilité

que $x = OP$ soit compris entre $\sqrt{2} - 1$ et $\frac{3}{5}$. La distribution de x étant uniforme sur cet intervalle, la

probabilité demandée est égale à la longueur de l'intervalle $[\sqrt{2} - 1, \frac{3}{5}]$ soit: $\frac{3}{5} - (\sqrt{2} - 1) = \frac{8}{5} - \sqrt{2} =$

0.185786....

2) On retient soit le segment OP soit le segment OP' pour la base du triangle isocèle.

Dès lors si $\frac{2}{5} < OP = x < \sqrt{2} - 1$, on prend $OP' = 1 - OP$ tel que $2 - \sqrt{2} < OP' < \frac{3}{5}$.

La probabilité demandée est alors égale à $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \mathbf{0.2}$