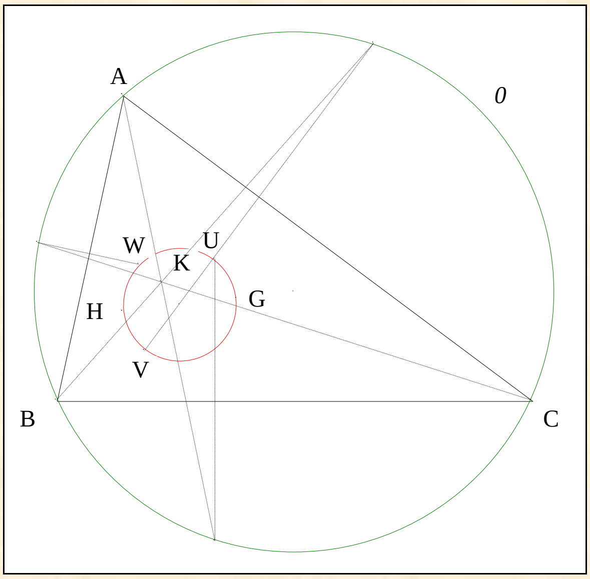
LE PROBLÈME 12073

DU

MONTHLY [1]

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur présente une solution synthétique d'un problème de *l'American Mathematical Monthly*.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents the study of a difficult problem where learning and deepening take turns subtly to solve it.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Sommaire

---

[1] Problem **12073**, *American Mathematical Monthly* (November 2018) 851
Barroso R., Problema **889 b**), Triangulos Cabri ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

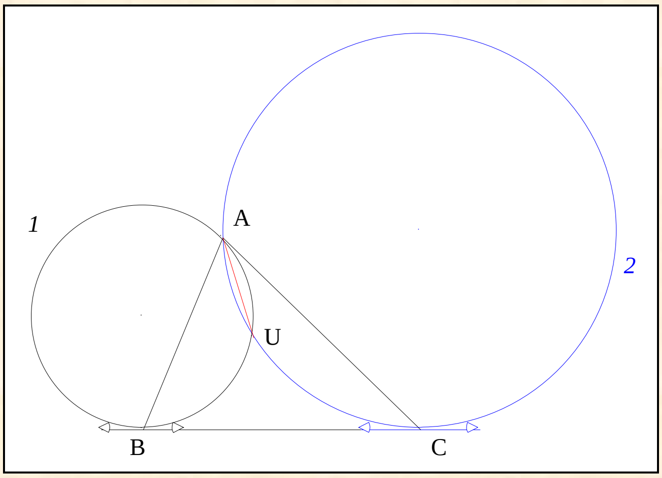
[2] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 05/12/2018 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

A. DEUX LEMMES

1. MÉDIANE PAR DEUX CERCLES ADJOINTS

VISION

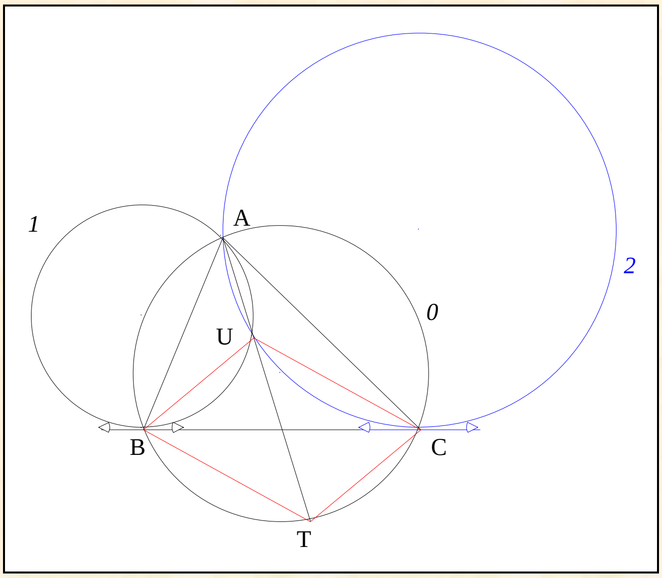
Figure :



Traits : ABC un triangle
1, *2* deux cercles passant par A et tangent à (BC) resp. en B, C
et U le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : (AU) est la A-médiane de ABC.

VISUALISATION

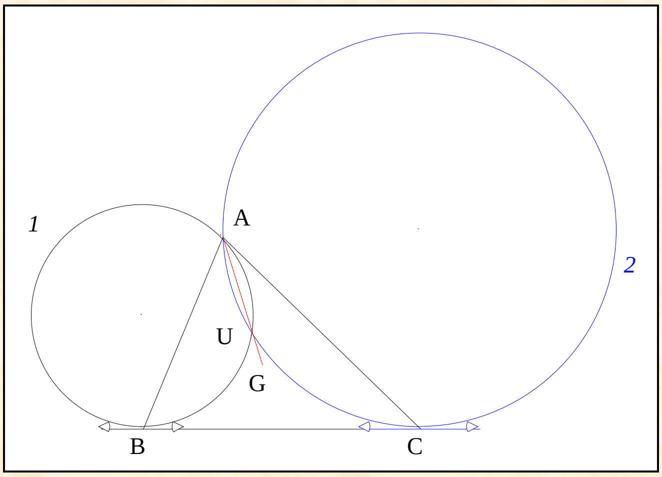


- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC
  T le second point d'intersection de (AU) avec *0*.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base A et B, les moniennes (UAT) et (BBC), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (UB) // (TC).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (UC) // (TB).
- **Conclusion :** le quadrilatère UBTC étant un parallélogramme, (AU) est la A-médiane de ABC.

Scolies : **(1)** *1* et *2* sont les deux "A-cercles adjoints de ABC"

(2) le point médian de ABC



- Notons G le point médian de ABC.
- **Conclusion :** (AU) passe par G.

Énoncé traditionnel [3]**:**

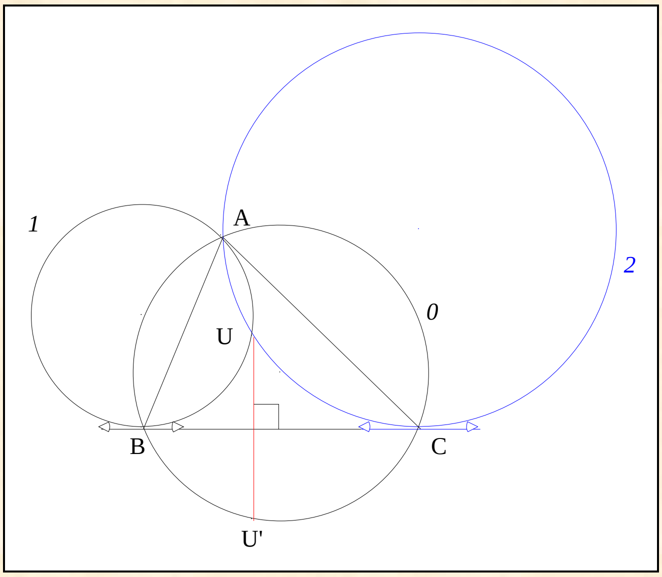
la corde commune à deux cercles sécants
passe par
le milieu de leurs communes tangentes.

[3] *Porismes* d'Euclide

2. UN POINT SUR LE CERCLE CIRCONSCRIT

VISION

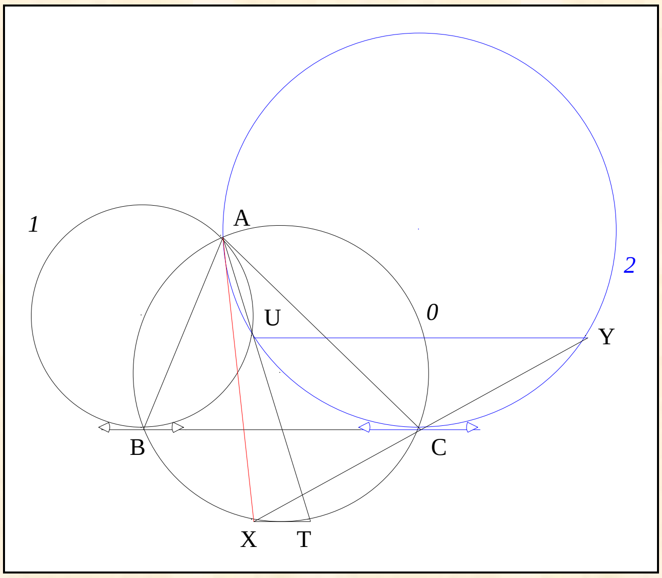
Figure :



Traits :		ABC	un triangle
		0	le cercle circonscrit à ABC,
		1, *2*	les deux cercles A-adjoints à ABC,
		U	le second point d'intersection de *1* et *2*,
	et	U'	le symétrique de U par rapport à (BC)

Donné : U' est sur *0*. [4]

VISUALISATION



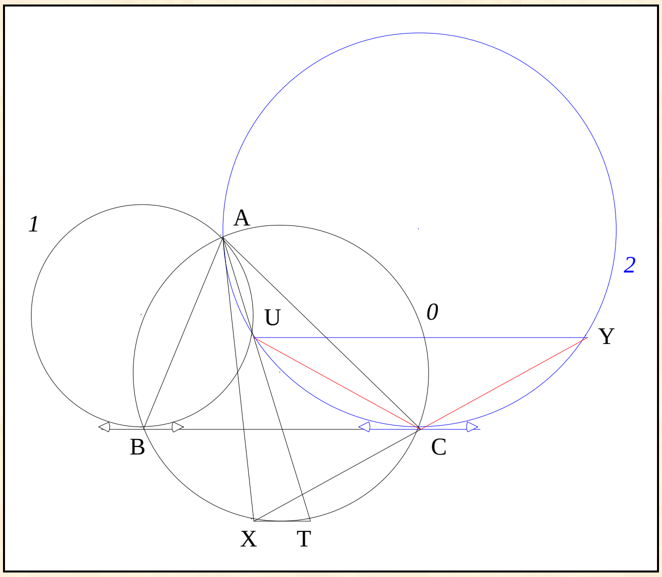
[4] A point on the circumcircle, AoPS du 03/12/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1747957_a_point_on_the_circumcircle

- Notons T le second point d'intersection de (AU) avec *0*,
  Y le second point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de U avec *2*
  et X le second point d'intersection de (CY) avec *0*.

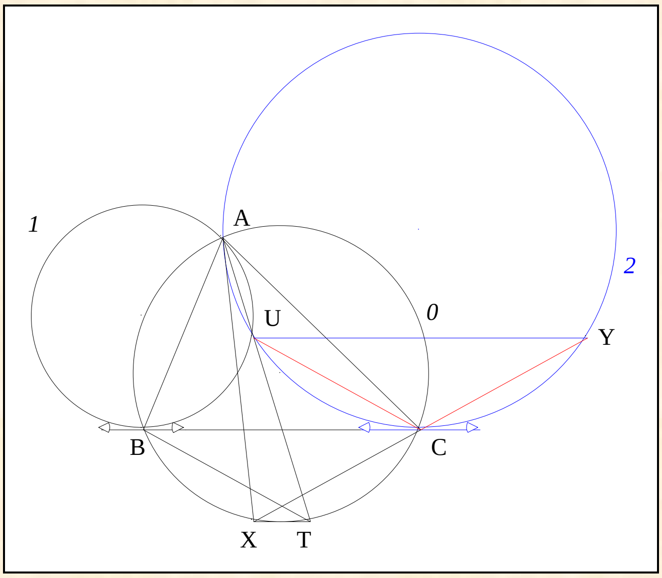
- Les cercles *0* et *2*, les points de base A et C, les moniennes (TAU) et (XCY),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (TX) // (UY).

- D'après **A. I**, (AU) est la A-médiane de ABC ;
  en conséquence, (AX) en est la A-symédiane.

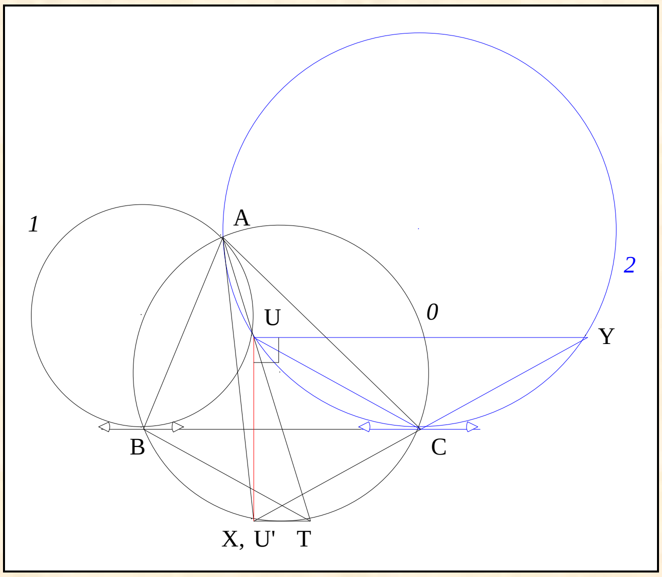
- **Scolie :** (UY), (BC) et (TX) sont parallèles entre elles.



- Le triangle CYU étant C-isocèle, CY = CU.



- D'après **A. I**, CU = BT ;
  le trapèze cyclique BCTX étant isocèle, BT = CX ;
  par transitivité de =, CY = CX.

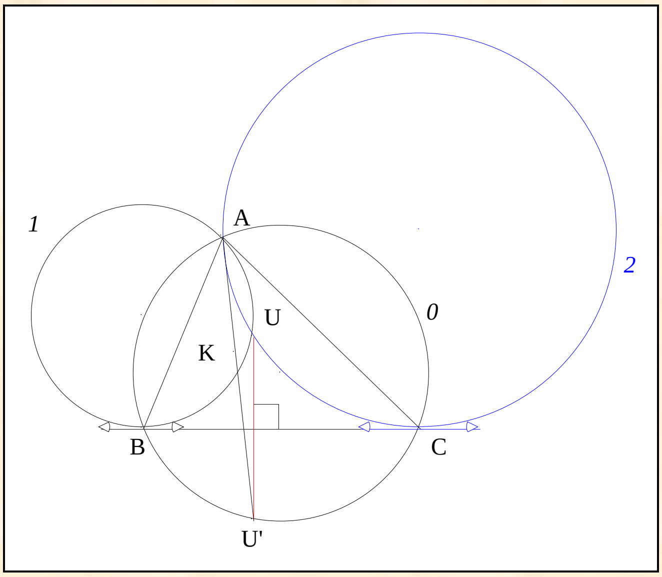


- D'après Thalès de Milet "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", le triangle UYX est U-rectangle.

- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux" appliqué à UYX, (CB) est la médiatrice de [UX].
  en conséquence, X et U' sont confondus.

- **Conclusion :** U' est sur *0*.

Scolie : le point de Lemoine



- Notons K le point de Lemoine de ABC.

- **Conclusion :** (AU') passe par K.

B. LE PROBLÈME 12073 DU *MONTHLY* [5]

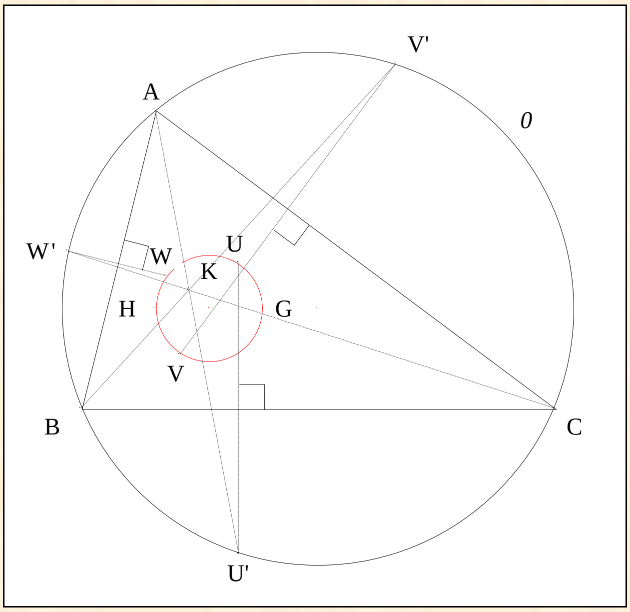
proposed

by

Hakan Karakus (Antaya, Turia)

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	G, H, K	le point médian, l'orthocentre, le point de Lemoine de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	U'V'W'	le triangle K-circumcévien de ABC
et	UVW	le K-triangle de Hagge. [6]

Donné : U, V, W, G et H sont cocycliques.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [7]

Archive :

Problem 12073 - 09 - H. Karakus (Turkey).

Given a scalene triangle ABC, let G denote its centroid and H denote its orthocenter. Let P_A be the second point of intersection of the two circles through A that are tangent to BC at B and at C. Similarly define P_B and P_C. Prove that G, H, P_A, P_B, and P_C are concyclic.

[8]

---

5 Problem **12073**, *American Mathematical Monthly* (November 2018) 851
Barroso R., Problema **889 b**), Triangulos Cabri ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

6 Ayme J.-L., Le cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 3 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

7 Ayme J.-L., Le cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

8 *American Mathematical Monthly* Problems – 2018 ; http://www.mat.uniroma2.it/~tauraso/AMM/amm.html