Pr. Cabri 899b

Enunciado

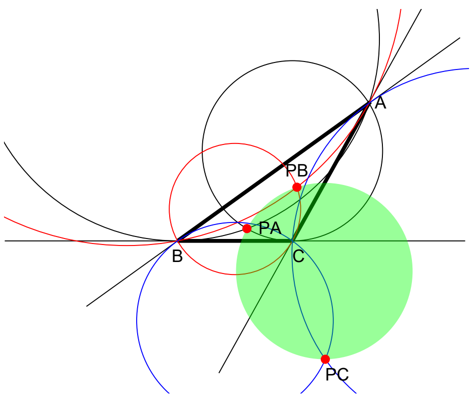
Dado un triángulo escaleno ABC, sean G su baricentro y H su ortocentro. Sea PA el segundo punto de intersección de las circunferencias que contienen a A y son tangentes a BC en B y en C. Definimos similarmente PB y PC. Demostrar que G, H, PA, PB y PC son concíclicos.

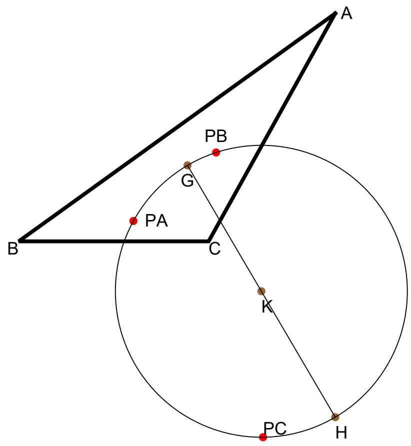
Propuesto por Hakan Karakus, Antaya , Turkía.
American Mathematical Monthly (2018): November, p. 851

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0). Calculamos las circunferencias por A.
El centro de la que es tangente a BC por B se puede calcular intersecando la mediatriz del lado c con la perpendicular a BC por B. Obtendríamos la circunferencia $Cab=\left(0,\ \frac{a^2+b^2}{2b}\right)$. Su distancia a B (o a A) sería el radio $Rab=\frac{a^2+b^2}{2b}$.
Análogamente $Cac=\left(1,\ \frac{1-2a+a^2+b^2}{2b}\right)$ y $Rac=\frac{1-2a+a^2+b^2}{2b}$.
Estas circunferencias se cortan en $PA=\left(\frac{a(-1+2a)+2b^2}{(1-2a)^2+4b^2},\ \frac{b}{(1-2a)^2+4b^2}\right)$.
De forma semejante pueden obtenerse $PB=\left(\frac{2\left(a+a^2\right)}{1+2a+a^2+b^2},\ \frac{2ab}{1+2a+a^2+b^2}\right)$ y $PC=\left(\frac{-(-2+a)a+b^2}{(-2+a)^2+b^2},\ -\frac{2(-1+a)b}{(-2+a)^2+b^2}\right)$.
Su circuncírculo tiene centro $Ck=\left(\frac{1}{6}(1+4a),\ \frac{-3(-1+a)a+b^2}{6b}\right)$ y radio $Rk=\frac{\sqrt{b^2+\left((-1+a)a+b^2\right)\left(9(-1+a)a+b^2\right)}}{6b}$.
Además como $G\left(\frac{1+a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$ y $H\left(a,\ \frac{a-a^2}{b}\right)$ se comprueba que el punto medio de GH es Ck y la distancia GH es 2Rk, es decir, G y H son extremos de un diámetro del circuncírculo de PA, PB y PC.





Se cumple también que esta circunferencia, la circunscrita y la de los 9 puntos tienen el mismo eje radical (forman parte del mismo haz) con ecuación $a\,(b - 2\,b\,x - 3\,y) + 3\,a^2\,y + b\,(x + b\,y) = 0$.