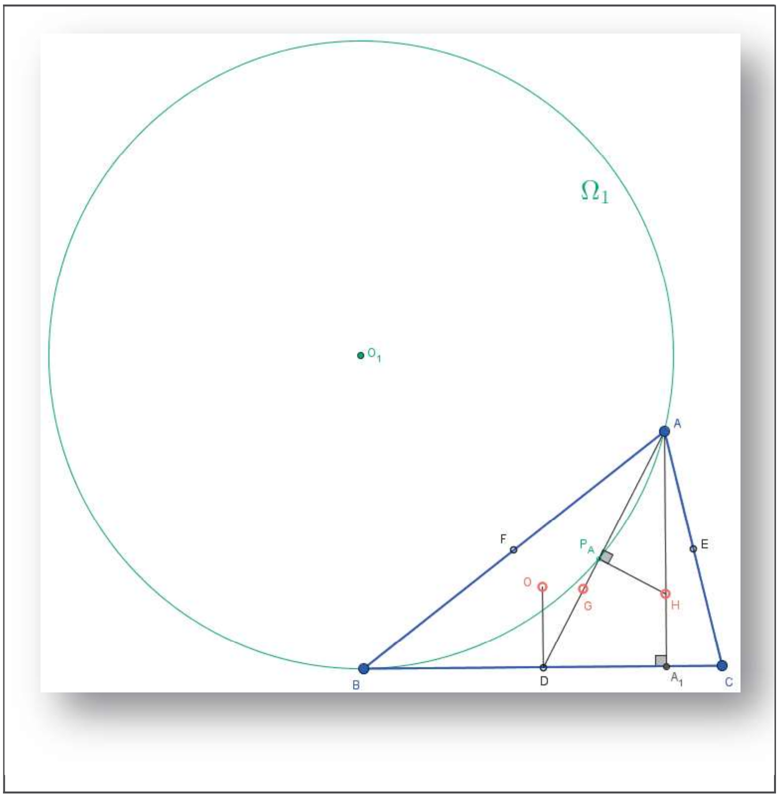
<u>Problema 899 b.-</u>

Dado un triángulo escaleno ABC, sean G su baricentro y H su ortocentro. Sea P_A el segundo punto de intersección de las circunferencias que contienen a A y son tangentes a BC en B y en C.
Definimos similarmente P_B y P_C. Demostrar que G, H, P_A, P_B y P_C son concíclicos.

<u>Último problema de la geometría del triángulo de la revista American Mathematical Monthly (2018).</u>
Propuesto por Hakan Karakus, Antaya, Turkía.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).
■ Vamos a probar que los puntos P_A, P_B y P_C son precisamente las proyecciones perpendiculares del ortocentro H sobre las respectivas medianas m_a, m_b y m_c, respectivamente. Si este hecho fuese cierto, entonces los puntos P_A, P_B y P_C pertenecerían a la circunferencia de diámetro GH. De este modo, el centro de esta circunferencia sería O', el punto simétrico de O (=circuncentro) respecto de G (=Baricentro).
Así, en efecto, los puntos G, H, P_A, P_B y P_C serían concíclicos.

■ Sean un triángulo escaleno ABC y una de sus medianas m_a. Por el ortocentro H, trazamos la perpendicular a dicha mediana siendo P_A el punto donde se interceptan.
Entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos AP_AB y AP_AC son tangentes al lado BC en los puntos B y C, respectivamente.
Dem.-
Por razones de similitud, bastará probar sólo este hecho con una de las circunferencias.
Sea Ω_1 la que circunscribe al triángulo AP_AB. Sea D el punto medio del lado BC.
La circunferencia Ω_1 será tangente al lado BC en el punto B si y sólo si $DP_A \cdot DA = DB^2$.



$$DP_A \cdot DA = DB^2 \Leftrightarrow$$

$$(DA - AP_A) \cdot DA = DA^2 - AP_A \cdot D = DB^2$$

$$\Leftrightarrow m_a^2 - AP_A \cdot m_a = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ (I).$$

Ahora bien, si llamamos A_1al pie de la altura h_a, entonces los triángulos rectángulos AP_AH y AA_1D son semejantes.

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{AP_A}{AH} = \frac{h_a}{m_a} \rightarrow AP_A \cdot m_a = h_a \cdot AH\,.$$

Por tanto, la expresión (I) se podrá expresar como

$$m_a^2 - h_a \cdot AH = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ (II).$$

Ahora bien, $AH = 2 \cdot OD$, siendo O el circuncentro del triángulo ABC.

Sustituyendo $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \rightarrow m_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$. Por tanto,

$$m_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2h_a \cdot OD \Leftrightarrow (b^2 + c^2 - a^2) = 4h_a \cdot OD \Leftrightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16\,h_a^2 \cdot OD^2 \ (III).$$

Si R es el radio de la circunferencia circunscrita, entonces $OD^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ y teniendo en cuenta que $S = [ABC] = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ah_a \rightarrow \frac{bc}{2} = h_a R$

Podemos expresar (III) como

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16\, h_a^2 \cdot \left(R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = 16\, h_a^2 R^2 - 4h_a^2 a^2 = 4b^2c^2 - 4h_a^2 a^2 \quad (IV).$$

Por último,

$$4h_a^2 a^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow 16S^2 = (2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2));$$

$$16S^2 = (a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c);$$

$$S = \sqrt{(p - b)(p - c)(p - a)p}$$

En definitiva, es cierto que la circunferencia Ω_1 será tangente al lado BC en el punto B y así, como se dijo al inicio, los puntos $G, H, P_A, P_B\ y\ P_C$ serían concíclicos.

■ Los puntos P_A, $P_B\ y\ P_C$ son así las proyecciones perpendiculares del ortocentro H sobre las respectivas medianas $m_a, m_b\ y\ m_c$, respectivamente. De este hecho se infiere que los puntos $P_A, P_B\ y\ P_C$ pertenecerían a la circunferencia de diámetro GH. De este modo, el centro de esta circunferencia sería O', el punto simétrico de O (=circuncentro) respecto de G (=Baricentro).
Así, en efecto, los puntos $G, H, P_A, P_B\ y\ P_C$ serían concíclicos.