

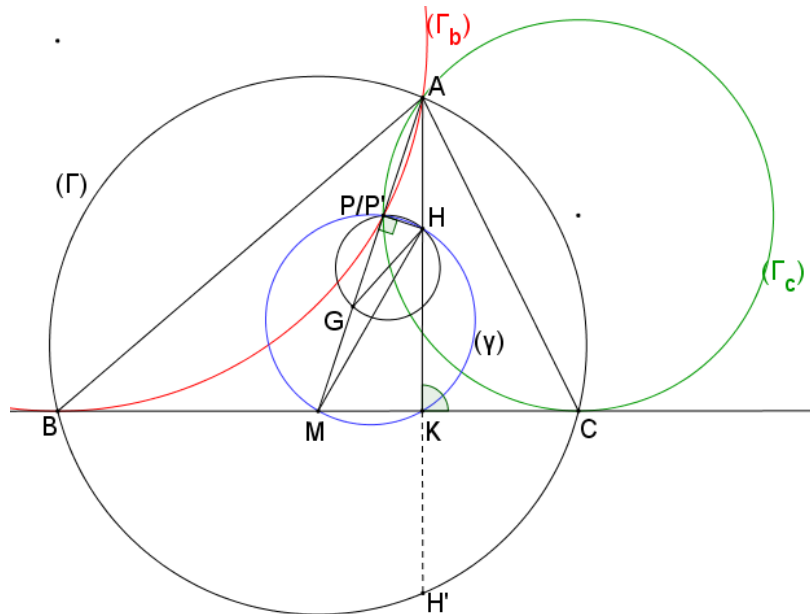
Problema 899

Propuesto por Hakan Karakus, Antaya , Turkía.

Dado un triángulo escaleno ABC , sean G su baricentro y H su ortocentro. Sea P_A el segundo punto de intersección de las circunferencias que contienen a A y son tangentes a BC en B y en C . Definimos similarmente P_B y P_C . Demostrar que G, H, P_A, P_B y P_C son concíclicos.

American Mathematical Monthly (2018): November, p. 851

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Nous allons démontrer que les trois points G, H et P_A forment un triangle rectangle d'hypoténuse GH et d'angle $\angle GP_A H = 90^\circ$. Dès lors par permutation des points P_A, P_B et P_C , les cinq points G, H, P_A, P_B et P_C sont sur un même cercle de diamètre GH .

Notations

Pour simplifier les notations, on désigne ci-après par P au lieu de P_A le deuxième point d'intersection autre que A des cercles (Γ_b) et (Γ_c) .

Soit:

M le milieu du côté BC . G est sur la médiane AM .

(Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC ,

(Γ_b) le cercle tangent en B au côté BC passant par A ,

(Γ_c) le cercle tangent en C au côté BC passant par A ,

(γ) le cercle circonscrit au triangle HKM ,

P' le point d'intersection du cercle (γ) avec la médiane AM ,

K la hauteur issue de A sur le côté BC . On sait que le point H' symétrique de H par rapport à K est sur (Γ) .

Lemme n°1. La médiane AM est l'axe radical des cercles (Γ_b) et (Γ_c) .

En effet la droite AP coupe la droite BC en un point M' tel que $M'B^2 = M'C^2 = MP \cdot MA$. D'où $M'B = M'C$ et le point M' est confondu avec le point M .

On en déduit $MB^2 = MP \cdot MA = (MA - AP) \cdot MA = MA^2 - AP \cdot MA$. D'où $AP \cdot MA = MA^2 - MB^2$.

Lemme n°2. Les points P et P' sont confondus.

La puissance de A par rapport au cercle (γ) est égale à $AP' \cdot AM = AH \cdot AK$

Or $AH \cdot AK = (AK - H'K) \cdot AK = AK^2 - H'K \cdot AK = AK^2 - BK \cdot KC$

Comme $AK^2 = MA^2 + MK^2$ et $BK \cdot KC = (MB + MK)(MB - MK) = MB^2 - MK^2$, on en déduit :

$AH \cdot AK = MA^2 - MB^2$.

D'où $AP' \cdot MA = AH \cdot AK = MA^2 - MB^2 = AP \cdot MA$. Soit $AP' = AP$.

Comme MH est diamètre du cercle (γ) , il en résulte que $\angle MPH = \angle GPH = 90^\circ$. q.f.d.