Quincena del 1 al 16 de Diciembre de 2018

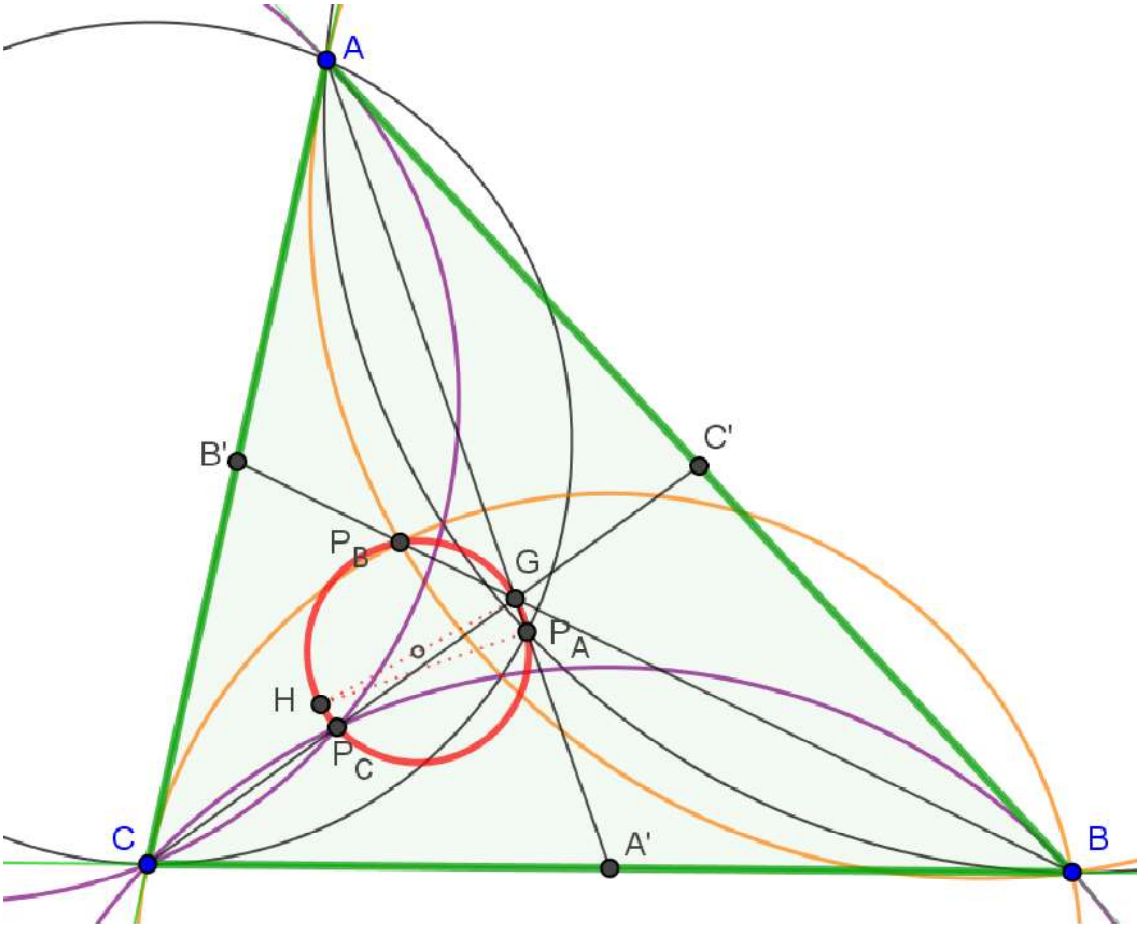
Propuesto por Hakan Karakus, Antaya, Turquía.

***Problema* 899 b).**

Dado un triángulo escaleno ABC, sean G su baricentro y H su ortocentro. Sea P_A el segundo punto de intersección de las circunferencias que contienen a A y son tangentes a BC en B y en C. Definimos similarmente P_B y P_C. Demostrar que G, H, P_A, P_B y P_C son concíclicos.

American Mathematical Monthly (2018): November, p. 851.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea A' el punto medio de BC. Por construcción (de P_A), A' tiene igual potencia respecto de las circunferencias que contienen a A y son tangentes a BC en B y en C. Por tanto, la mediana de A es el eje radical de estas circunferencias. Tenemos pues $A'P_A \cdot A'A = \frac{a^2}{4}$.

La longitud de AA' es la de la mediana de A, o sea, $(AA')^2 = m_A^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Si $A'P_A = AA' - AP_A$ resulta $(AA')^2 - AA' \cdot AP_A = \frac{a^2}{4}$ y de ahí $AA' \cdot AP_A = m_A^2 - \frac{a^2}{4} = S_A$.

En consecuencia

$$AG \cdot AP_A = \frac{2}{3} S_A \qquad (*)$$

y de forma similar $BG \cdot BP_B = \frac{2}{3}S_B$ y $CG \cdot CP_C = \frac{2}{3}S_C$.

Como la longitud de AG es dos terceras partes de la mediana, podemos concluir que $AP_A = \frac{S_A}{m_A}$ y el vector $\overrightarrow{AP_A} = \frac{S_A}{m_A^2} \cdot \overrightarrow{AA'}$.

Si usamos coordenadas baricéntricas, de esa última relación podemos deducir muy fácilmente las coordenadas del punto $P_A = (a^2 : 2S_A : 2S_A)$.

Utilizando ahora la expresión $(*)$ vamos a probar que la circunferencia de ecuación

$$\Omega(x, y, z): a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{2}{3}(x + y + z)(S_Ax + S_By + S_Cz) = 0$$

es la que pasa por los cinco puntos.

Es inmediato comprobar que $\Omega(G) = \Omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0$. Por tanto pasa por el baricentro. La potencia del vértice A respecto de esta circunferencia es $\frac{2}{3}S_A = AG \cdot AP_A$ por $(*)$ y eso significa que esa circunferencia contiene al punto P_A y análogamente a los otros dos P_B y P_C.

(Podríamos comprobarlo usando las coordenadas de estos puntos, pero es innecesario).

Por último, un cálculo más detallado, nos demuestra que también $H = \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right)$ está sobre la misma.[1]

$$\Omega(H) = \frac{a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C}{S_AS_BS_C} - 2\left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C}\right)$$
$$= \frac{(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C) - 2(S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B)}{S_AS_BS_C} = 0$$

Con esto concluiríamos el problema, pero vamos a añadir una propiedad más: el baricentro y el ortocentro son extremos de un diámetro de esta circunferencia, que por ello es llamada también la ***circunferencia ortobaricéntrica***.

Bastará con demostrar que la recta HP_A es perpendicular a la mediana de A. Esta mediana, en coordenadas baricéntricas, tiene ecuación $y = z$. El punto del infinito de una perpendicular a ella es el vector $\vec{v} = (S_B - S_C : S_C + 2S_A : -2S_A - S_B)$. La propiedad queda demostrada por la anulación del determinante formado por ese vector y los puntos P_A y H.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{S_A} & \frac{1}{S_B} & \frac{1}{S_C} \\ a^2 & 2S_A & 2S_A \\ S_B - S_C & S_C + 2S_A & -2S_A - S_B \end{vmatrix} = 0 \blacksquare$$

[1] $(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C) - 2(S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B) = -a^2S_A + (b^2 - 2S_C)S_B + c^2S_C = -a^2S_A + (c^2 - a^2)S_B + c^2S_C = c^2(S_B + S_C) - a^2(S_A + S_B) = 0 = c^2a^2 - a^2c^2 = 0$