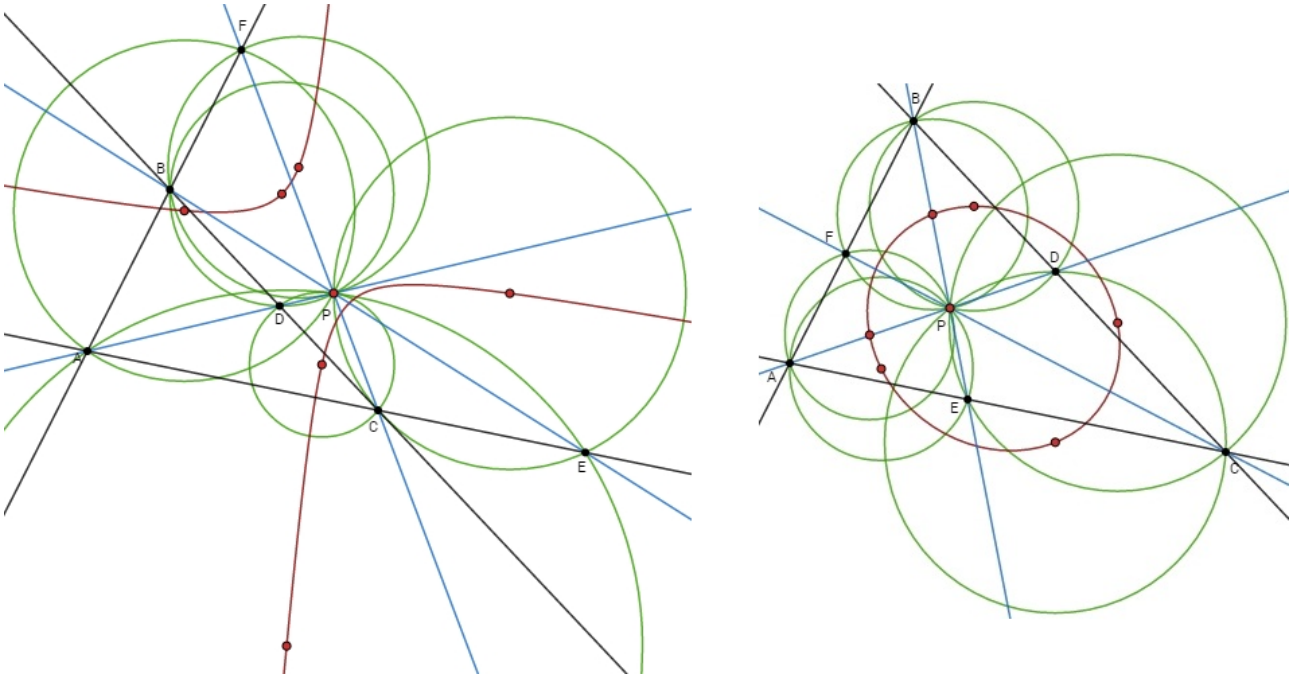


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 900. (Francisco-Javier García Capitán y Ricardo Barroso Campos) Dados un triángulo ABC y un punto P del plano que contiene al triángulo, las tres cevianas que forma el punto P con los vértices del triángulo dan lugar a seis triángulos AFP , APE , BPF , BDP , CPD y CEP :

- ① Demostrar que los seis circuncentros están situados sobre una cónica.



- ② El baricentro G y el ortocentro H son los únicos puntos para los que la cónica de circuncentros es una circunferencia (que recibe el nombre de circunferencia de Van Lamoen).
 ③ ¿ Cuándo esta cónica es una hipérbola, elipse o parábola ?.

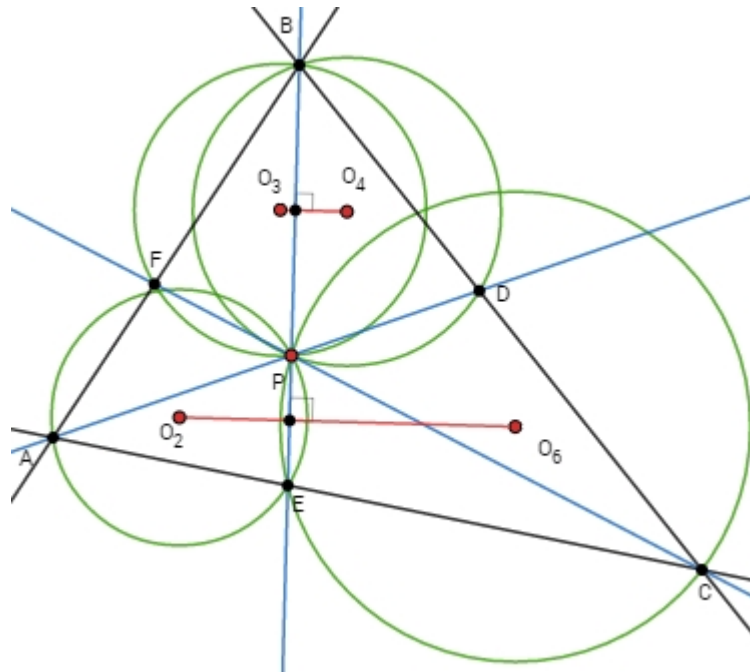
Solución:

- ① Llamando O_1 , O_2 , O_3 , O_4 , O_5 y O_6 a los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos AFP , APE , BPF , BDP , CPD y CEP , respectivamente, resulta que:

- ☺ La recta BE es el eje radical de las circunferencias BPF y BDP , por lo que el segmento O_3O_4 es perpendicular a ella.
 ☹ La recta BE es el eje radical de las circunferencias APE y CEP , por lo que el segmento O_2O_6 es perpendicular a ella.

por lo que $O_3O_4 \parallel O_2O_6$ y, de igual forma, se probaría que $O_1O_2 \parallel O_4O_5$ y $O_1O_3 \parallel O_5O_6$. Por tanto, considerando el hexágono $O_2O_1O_3O_4O_5O_6$, el recíproco del Teorema de Pascal nos asegura que estos seis puntos están situados sobre una cónica, ya que las rectas que unen lados opuestos se cortan en puntos alineados, por estar todos ellos en la recta del infinito.

TRIÁNGULOS CABRI

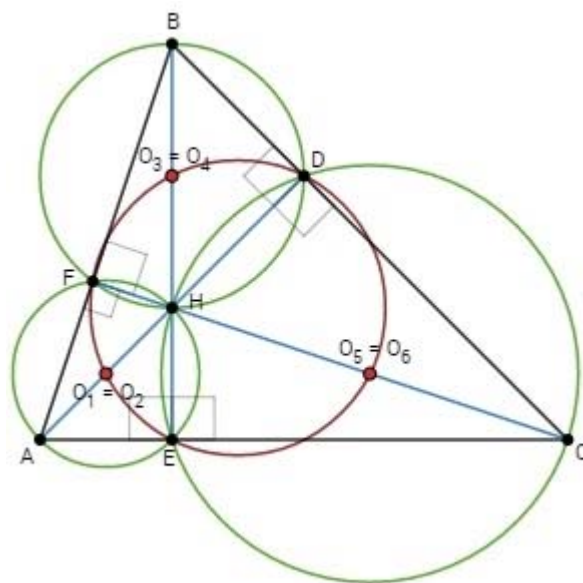


② Vamos a distinguir dos casos:

❶ Si $P = H$ es el ortocentro del triángulo ABC , como:

$$\angle AFH = \frac{\pi}{2} = \angle AEH$$

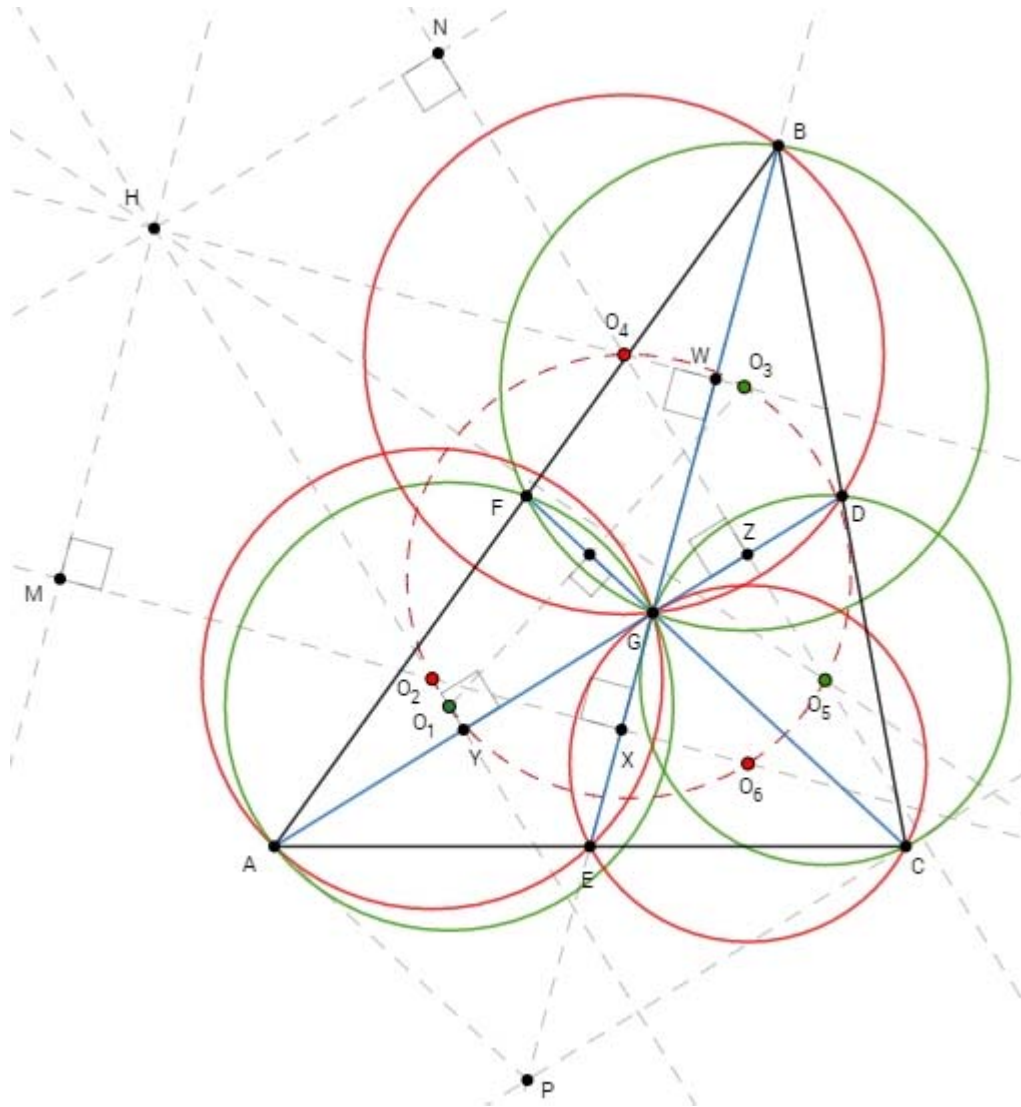
entonces, el cuadrilátero $AFHE$ es cíclico, por lo que, en este caso, las circunferencias circunscritas a los triángulos AFP y APE coinciden y, por tanto, $O_1 = O_2$. De igual forma, se probaría que $O_3 = O_4$ y que $O_5 = O_6$, por lo que los seis centros, en realidad, son tres y, por tanto, la cónica que los contiene es una circunferencia.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

- ② Si $P = G$ es el baricentro del triángulo ABC , vamos a hacer la demostración en varias etapas:



- ▲ Si $H = O_1O_2 \cap O_3O_4$ y M y N son puntos de las rectas O_2O_6 y O_4O_5 , respectivamente, tales que:

$$\begin{cases} HM \perp O_2O_6 \\ HN \perp O_4O_5 \end{cases}$$

resulta que:

$$\left\{ \begin{cases} BW = WG \\ GX = XE \end{cases} \Rightarrow HM = WX = \frac{BE}{2} \right. \\ \left\{ \begin{cases} AY = YG \\ GZ = ZD \end{cases} \Rightarrow HN = YZ = \frac{AD}{2} \right.$$

TRIÁNGULOS CABRI

y como:

$$\begin{cases} \angle MHW = \frac{\pi}{2} \\ \angle YHN = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \angle MO_2H = \angle O_4HN$$

entonces, los triángulos MO_2 y O_4HN son semejantes, por lo que:

$$\frac{HO_4 \cdot BE}{2} = HO_4 \cdot HM = HO_2 \cdot HN = \frac{HO_2 \cdot AD}{2} \Rightarrow HO_4 \cdot BE = HO_2 \cdot AD$$

★ Si P es un punto de la mediana BE tal que $CP \parallel AD$, como:

$$\begin{cases} HO_3 \perp BG \\ HO_1 \perp CP \\ O_1O_3 \perp CG \end{cases}$$

entonces, los triángulos HO_1O_3 y PGC son semejantes, por lo que:

$$HO_3 \cdot CP = HO_1 \cdot GP$$

y, como el cuadrilátero $AGCP$ es un paralelogramo, siendo:

$$\begin{cases} CP = AG = \frac{2AD}{3} \\ GP = BG = \frac{2BE}{3} \end{cases}$$

resulta que:

$$HO_3 \left(\frac{2AD}{3} \right) = HO_1 \left(\frac{2BE}{3} \right) \Rightarrow HO_3 \cdot AD = HO_1 \cdot BE$$

★ Utilizando las dos igualdades probadas con anterioridad, se verifica que:

$$\begin{cases} HO_4 \cdot BE = HO_2 \cdot AD \\ HO_3 \cdot AD = HO_1 \cdot BE \end{cases} \Rightarrow \frac{HO_4}{HO_2} = \frac{AD}{BE} = \frac{HO_1}{HO_3} \Rightarrow HO_3 \cdot HO_4 = HO_1 \cdot HO_2$$

por lo que el recíproco del Teorema de la Potencia nos asegura que los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son concíclicos y, razonando de forma totalmente análoga obtendríamos que los puntos O_1, O_2, O_5 y O_6 y los puntos O_3, O_4, O_5 y O_6 son concíclicos.

★ Si la recta HO_5 corta a las circunferencias $O_1O_2O_5O_6$ y $O_3O_4O_5O_6$ en los puntos U y V , respectivamente, según el Teorema de la Potencia:

$$\begin{cases} HO_1 \cdot HO_2 = HU \cdot HO_5 \\ HO_3 \cdot HO_4 = HV \cdot HO_5 \end{cases} \xrightarrow{HO_3 \cdot HO_4 = HO_1 \cdot HO_2} HU \cdot HO_5 = HV \cdot HO_5 \Rightarrow HU = HV$$

y, como los puntos H, U, V y O_5 están alineados, entonces, $U = V$, por lo que la recta HO_5 es el eje radical de las circunferencias $O_1O_2O_5O_6$ y $O_3O_4O_5O_6$ y, de forma totalmente análoga obtendríamos que la recta HO_6 es el eje radical de las circunferencias $O_1O_2O_5O_6$ y $O_3O_4O_5O_6$.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

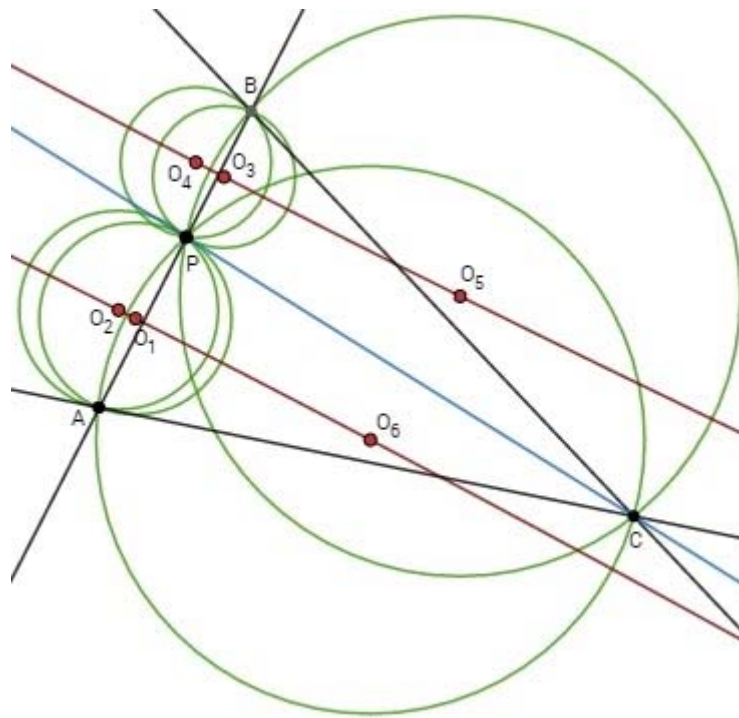
- ★ Finalmente, como los puntos H , O_5 y O_6 no están alineados, necesariamente ambas circunferencias han de coincidir, por lo que los seis puntos O_1 , O_2 , O_3 , O_4 , O_5 y O_6 son concíclicos.

- ③ Si el punto P se halla situado en el lado AB (exceptuando ambos vértices) del triángulo ABC , entonces:

$$\begin{cases} D = B \\ E = A \\ F = P \end{cases}$$

por lo que:

- ☺ La circunferencia circunscrita al triángulo AFP es la circunferencia que pasa por A y es tangente en P a la recta CP , la circunferencia circunscrita al triángulo APE es la circunferencia que pasa por P y es tangente en A a la recta CA y la circunferencia circunscrita al triángulo CEP es la circunferencia circunscrita al triángulo CAP , por lo que estas tres circunferencias tiene por eje radical a la recta AP y, por tanto, los puntos O_1 , O_2 y O_6 están situados sobre la recta mediatriz del segmento AP .
- ☹ La circunferencia circunscrita al triángulo BPF es la circunferencia que pasa por B y es tangente en P a la recta CP , la circunferencia circunscrita al triángulo BDP es la circunferencia que pasa por P y es tangente en B a la recta CB y la circunferencia circunscrita al triángulo CPD es la circunferencia circunscrita al triángulo CPB , por lo que estas tres circunferencias tiene por eje radical a la recta BP y, por tanto, los puntos O_3 , O_4 y O_5 están situados sobre la recta mediatriz del segmento BP .



TRIÁNGULOS CABRI

y, como $AP = BP$, entonces, las rectas mediatrices de los segmentos AP y BP son paralelas y, por tanto, la cónica que pasa por los seis centros es un par de rectas paralelas, es decir, es una cónica de tipo parábola. De igual forma, podríamos probar que si el punto P está situado sobre los lados BC o CA (exceptuando los vértices) la cónica también es un par de rectas paralelas.