Problema 900

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, (IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba) y Ricardo Barroso Campos

Dado un triángulo ABC, y un punto del plano P. Las tres cevianas que forma P con los vértices dan lugar a seis triángulos APF, CPF, APE, BPE, BPG, CPG.

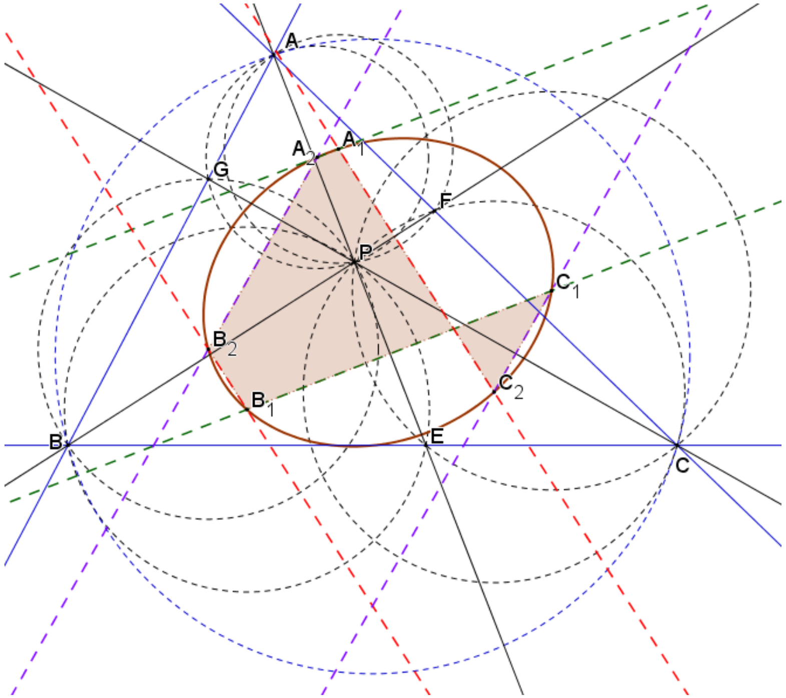
a) Demostrar que los seis circuncentros están en una cónica.

b) El baricentro y el ortocentro son los únicos puntos para los que la cónica de circuncentros es una circunferencia. Esta circunferencia se llama circunferencia de van Lamoen.

c)¿Cuándo esta cónica es hipérbola, elipse o parábola?

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Question a)



On désigne par A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles APF,APG,BPE,BPG,CPE et CPF. On suppose qu'ils sont tous distincts.

Les droites AA et BC respetivement médiatrices des segments AP et PE sont parallèles entre elles. Il en est de même des droites BB et AC d'une part et des droites CC et AB d'autre part. L'hexagone $A_1A_2B_2B_1C_1C_2$ (voir figure ci-contre) a donc trois paires de côtés opposés parallèles. D'après la réciproque du [théorème de Pascal]* dit de l'hexagramme mystique, il y a une conique qui passe par les six sommets de l'hexagone.

* énoncé : si un hexagone a les intersections de ses paires de côtés alignées, il est inscrit dans une conique . Les trois points d'intersection des droites parallèles qui portent les côtés opposés sont alignés sur la droite projective de l'infini

Question b)

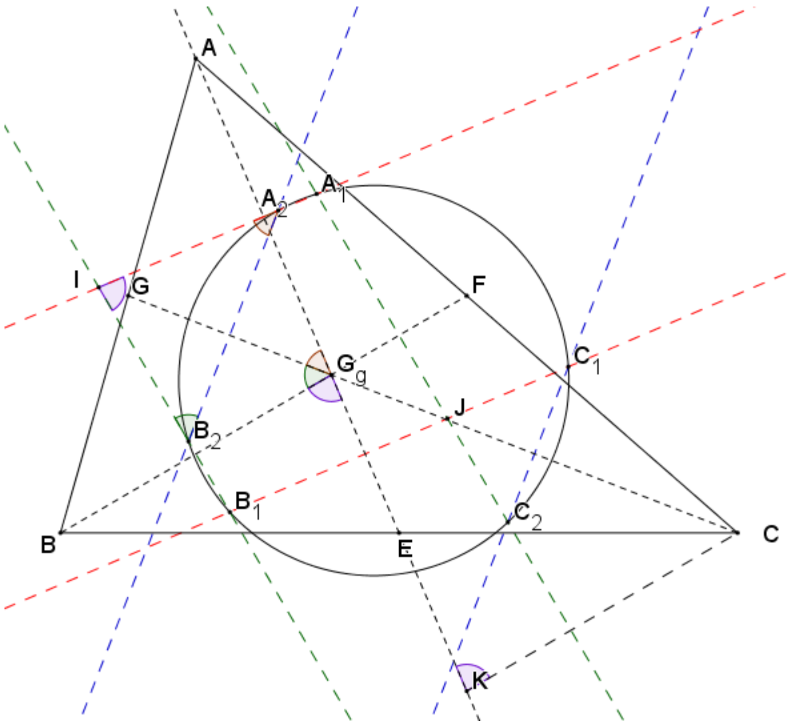
La conique qui passe par les points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 est un cercle (γ). On distingue deux cas de figure:

1) Les points A_1 et A_2 sont confondus ainsi que les points B_1 et B_2 d'une part et les points C_1 et C_2 d'autre part.

Cette configuration est obtenue lorsque le point P est l'orthocentre H du triangle ABC. En effet les triangles APF et APG sont rectangles en F et G et les cercles circonscrits sont confondus en un seul cercle dont le centre est le milieu du diamètre AP. Il en est de même avec les triangles BPE et BPG d'une part et les triangles CPE et CPF d'autre part. Le cercle (γ) est alors circonscrit au triangle dont les sommets sont les milieux des segments AH,BH et CH.

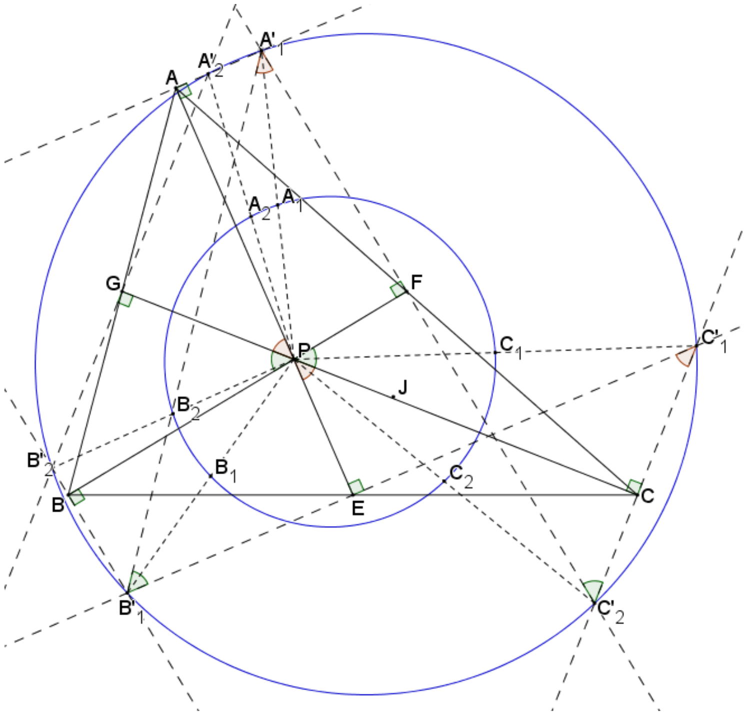
Réciproquement, on suppose que les centres des cercles circonscrits aux triangles APF et APG, puis aux triangles BPE et BPG et enfin aux triangles CPE et CPF sont confondus.On va démontrer que cette configuration est obtenue si et seulement si P est l'orthocentre du triangle ABC.
Les quatre points A,F,P,G sont cocycliques.Il en résulte que $\angle BPC = 180° - \angle GAF = 180° - \angle BAC$. Le symétrique de P par rapport à la droite BC appartient donc au cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC. De la même manière les symétriques de P par rapport aux droites CA et AB appartiennent à (Γ). P est nécessairement confondu avec l'orthocentre H du triangle ABC. C.q.f.d.

2) parmi les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2, au moins cinq d'entre eux sont distincts.
Cette configuration obtenue lorsque le point P est le centre de gravité G_g du triangle ABC a été analysée par F.M. van Lamoen Problem 10830 American Mathematical Monthly 2000 (107) 863. Dès lors les points E,F et G sont respectivement les milieux des côtés BC,CA et AB. On va démontrer que les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2, sont cocycliques:



On retient les mêmes notations que précédemment. Les droites $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ se coupent au point I et les droites $[A_1C_2]$ et $[B_1C_1]$ au point J. La parallèle menée de C à la médiane [BF] coupe la médiane [AE] au point K.
On va démontrer que les quatre points A_1,A_2,B_1,B_2 sont cocycliques. Les mêmes démonstrations faites avec les points A_2,B_1,B_2,C_1 et B_1,B_2,C_1,C_2 permettent alors de conclure à la cocyclité des six points.
Lemme n°1:$IA_1/IB_1 = AE/BF$
Les droites $[A_1A_2]$ et $[B_1C_1]$ d'une part, $[B_1B_2]$ et $[A_1C_2]$ d'autre part, parallèles deux à deux, déterminent le parallélogramme IA_1JB_1. Comme ces droites sont respectivement médiatrices des segments AG_g,G_gE,BG_g,G_gF, on en déduit que:
IA_1/IB_1 = rapport des distances entre ces droites prises deux à deux
soit $IA_1/IB_1 = (AG_g + G_gE)/2 / (BG_g + G_gF)/2 = AE/BF$.
Par ailleurs on a les relations d'angles $\angle IB_2A_2 = \angle BG_gG$ et $\angle IA_2B_2 = \angle AG_gG$.
D'où $\angle A_2IB_2 = \angle BG_gE$.
Lemme n°2: $IA_2/IB_2 = BF/AE$
On considère le triangle CG_gK.CK étant parallèle à BG_g et E étant milieu de BC, on a $KC = BG_g = 2BF/3$ et $KG_g = 2G_gE = 2AE/3$.
D'autre part $\angle CKG_g = \angle BG_gE$ et $\angle CG_gK = \angle AG_gG$. Les deux triangles IB_2A_2 et KCG_g sont donc semblables. D'où $IA_2/IB_2 = KC/KG_g = BF/AE$.
D'après les deux lemmes, il en résulte que $IA_1*IA_2 = IB_1*IB_2$ Cette relation exprime la puissance du point I par rapport au cercle circonscrit aux quatre points A_1,A_2,B_1,B_2.
C.q.f.d

Réciproquement, on suppose que les six centres des cercles circonscrits APF,APG,BPE,BPG,CPE et CPF sont tous distincts et sont cocycliques. On va démontrer que le point P est confondu avec le centre de gravité G_g du triangle ABC.



On trace les droites perpendiculaires en A,E,B,F,C,G aux droites AE,BF et CG. Ces droites sont parallèles deux à deux. Elles se coupent aux points $A'_1,A'_2,B'_1,B'_2,C'_1,C'_2$ qui sont homothétiques des points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 dans l'homothétie de centre P et de rapport 2.Si les points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 sont cocycliques, il en est de même des points $A'_1,A'_2,B'_1,B'_2,C'_1,C'_2$.
Soit $\angle APG = \alpha$ et $\angle BPG = \beta$. Comme les angles $\angle PEC'_1 1$ et PCC'_1 sont droits, les quatre points P,E,C,C'_1 sont cocycliques et $\angle B'_1C'_1C'_2 = \angle EC'_1C = \angle EPC = \angle APG = \alpha$.
De la même manière les quatre points C,F,P,C'_2 sont cocycliques de sorte que $\angle A'_1C'_2C'_1 = \angle CPF = \angle BPG = \beta$.
Lemme: Si les quatre points C'_1,C'_2,B_1',A'_1 sont cocycliques, alors le point P est sur la médiane qui est issue du sommet C dans le triangle ABC.
Démonstration: on pose $u = AP/AE$ et $v = BP/BF$. Les quatre points C'_1,C'_2,B_1',A'_1 étant cocycliques, alors $\angle B'_1A'_1C'_2 = \angle B'_1C'_1C'_2 = \alpha$ et $\angle A'_1B'_1C'_1 = \angle A'_1C'_2C'_1 = \beta$.
Or A'_1F et B'_1B étant deux droites parallèles perpendiculaires à B, on a $BF = A'_1B'_1.\sin(\alpha)$, de même que AA'_1 et B'_1E étant deux droites parallèles perpendiculaires à AE, on a $AE = A'_1B'_1.\sin(\beta)$.
D'où $BF/AE = \sin(\alpha)/\sin(\beta) = (AG/AP)/(BG/BP)$ soit $BP.AE.AG = AP.BF.BG$,ce qui donne l'équation $AG/BG = u/v$.
L'application du théorème de Menelaus au triangle APG avec la droite transversale [BC] et au triangle BPG avec la droite transversale [AC] donne les deux relations suivantes:
$AE.PC.BG = EP.CG.BA$ et $BF.PC.AG = FP.CG.AB$. D'où $AG.(EP/AE) = BG.(FP/BF)$.
Comme $EP = AE - AP$ et $FP = BF - BP$,$EP/AE = 1-AP/AE=1 - u$ et $FP/BF = 1 - BP/BF = 1 - v$.
On en déduit $AG/BG = u/v = (1 - v)/(1 - u)$ qui entraine $u + v = 1$ ou $u = v$. La première égalité est impossible, sinon P serait sur la droite AB en contradiction avec les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 distincts. La deuxième égalité montre que G est milieu de AB.
Le même raisonnement avec les quatre points B'_1,B'_2,A'_1, et C'_1 puis avec les quatre points A'_1,A'_2,B'_1, et C'_1 fait apparaître que P est sur les médianes issues respectivement de C et de B.
C.q.f.d.

Question c)

A partir des coordonnées barycentriques de A(1,0,0), de B(0,1,0), de C(0,0,1) et de P(p,q,r) on pourrait déterminer celles des six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 puis l'équation de la conique passant par ces six points. Celle-ci serait de la forme $f_1x^2 + f_2y^2 + f_3z^2 + 2f_4xy + 2f_5yz + 2f_6zx = 0$ avec les coefficients f_i (i = 1 à 6) qui s'expriment en fonction de p,q,r et des dimensions a,b,c des côtés du triangle ABC.
On peut aussi prendre **comme triangle de référence le triangle $X_1X_2X_3$** (voir figures ci-après) dont les sommets sont à l'intersection des médiatrices des segments BP,CP et AP.
Dès lors les coordonnées barycentriques des six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 pris deux par deux sur les droites $[X_2X_3]$, $[X_3X_1]$ et $[X_1X_2]$, peuvent s'exprimer avec les paramètres réels k,m,n sous la forme:
$A_1\,(0,m,1 - m)$; $A_2(0,1 - n,n)$; $B_1(1 - n,0,n)$; $B_2(k,0,1 - k)$; $C_1(1 - k,k,0)$; $C_2(m,1 - m,0)$.
On vérifie que ces six points sont sur la conique d'équation $(\mathscr{E})$:
$$(1 - k)mnx^2 + k(1 - m)ny^2 + km(1 - n)z^2 - k(1 - m - n + 2mn)yz - m(1 - k - n + 2kn)zx - n(1 - k - m + 2km)xy = 0$$

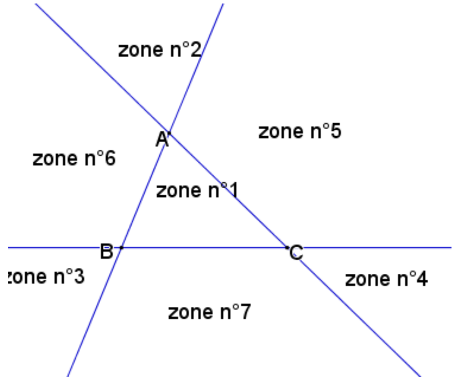
La transformation qui, aux coordonnées barycentriques $(x, y, z = 1 - x - y)$ associent les coordonnées cartésiennes (x, y) donne la forme de l'équation cartésienne de la conique: $\mathbf{mx^2 + ky^2 + (k + m - n)xy - (1 + k - n)mx - (1 + m - n)ky + km(1 - n) = 0}$

La discriminant Δ associé à cette forme quadratique est égal à $\mathbf{\Delta = (k + m - n)^2 - 4km = k^2 + m^2 + n^2 - 2km - 2mn - 2nk.}$

Si $\mathbf{\Delta > 0}$, soit $k^2 + m^2 + n^2 > 2km + 2mn + 2nk$,la conique est une **hyperbole**. Si $\mathbf{\Delta = 0}$, c'est une **parabole** et si $\mathbf{\Delta < 0,}$ c'est une **ellipse**.

Représentation graphique à l'aide de Geogebra

On partage le plan qui contient le triangle ABC en 7 zones définies comme ci-contre:

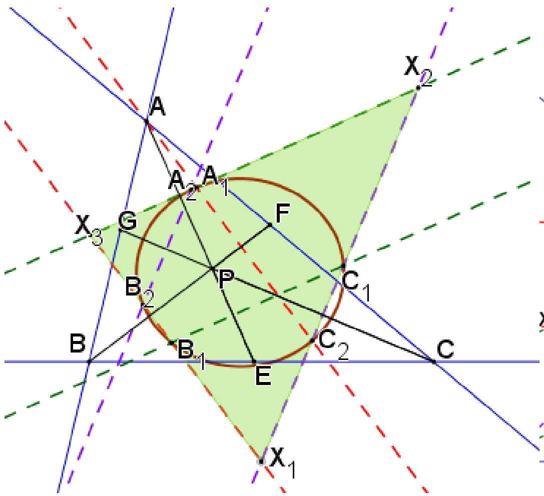


1) quand P appartient aux zones n° 1(à l'intérieur du triangle) et n°2,3 et 4, la conique est une **ellipse**. Dans ces zones les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 sont toujours situés à l'intérieur des côtés du triangle $X_1X_2X_3$, avec les paramètres k,m,n appartenant à l'intervalle $]0,1[$ soit $\Delta < 0$.

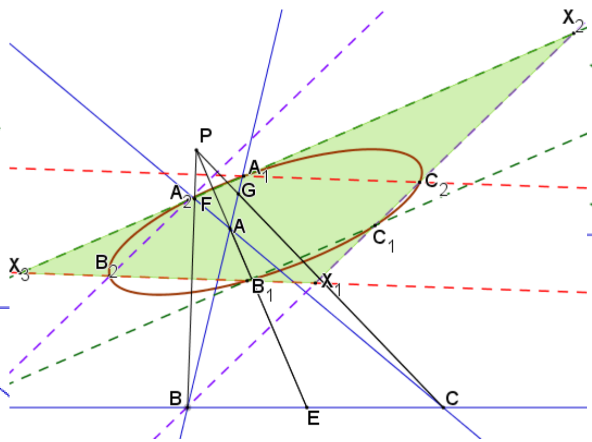
2) quand P appartient aux zones n°5,6,7, deux cas sont faciles à identifier:

2-1) la conique est une **ellipse** quand les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 sont à l'extérieur des côtés du triangle $X_1X_2X_3$,avec chaque paire de points qui encadrent les extrémités des segments X_1X_2, X_2X_3 et X_1X_3.

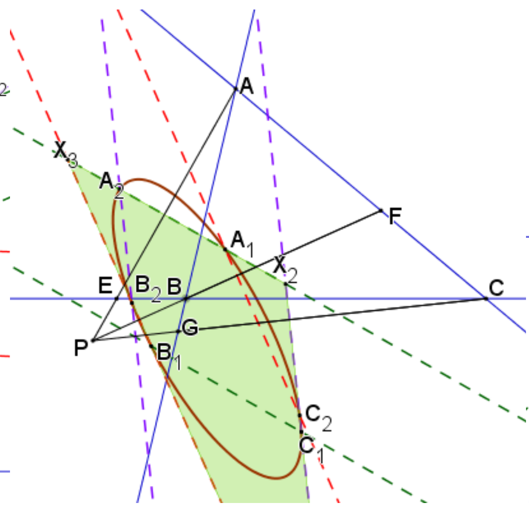
2-2) la conique est une **hyperbole** quand les six points A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 sont à l'extérieur des côtés du triangle $X_1X_2X_3$,avec au moins une paire de points situés du même côté par rapport à l'une des extrémités d'un segment X_iX_j.



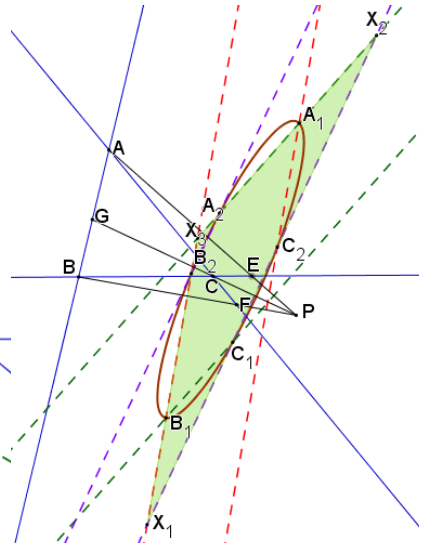
zone n°1



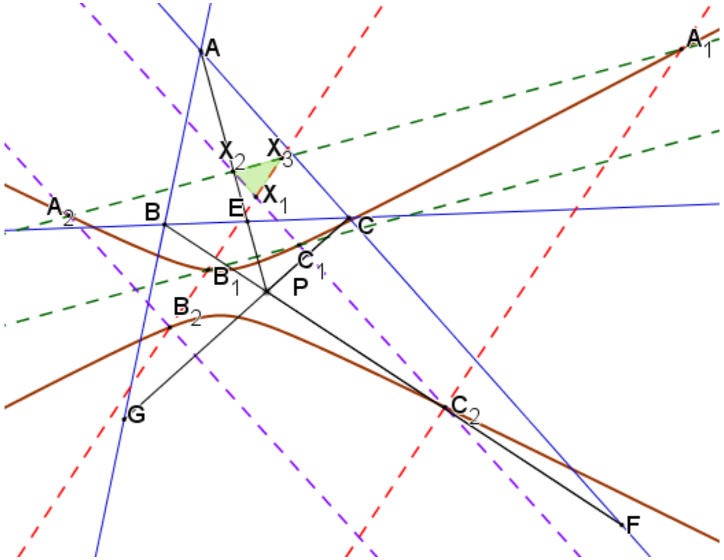
zone n°2



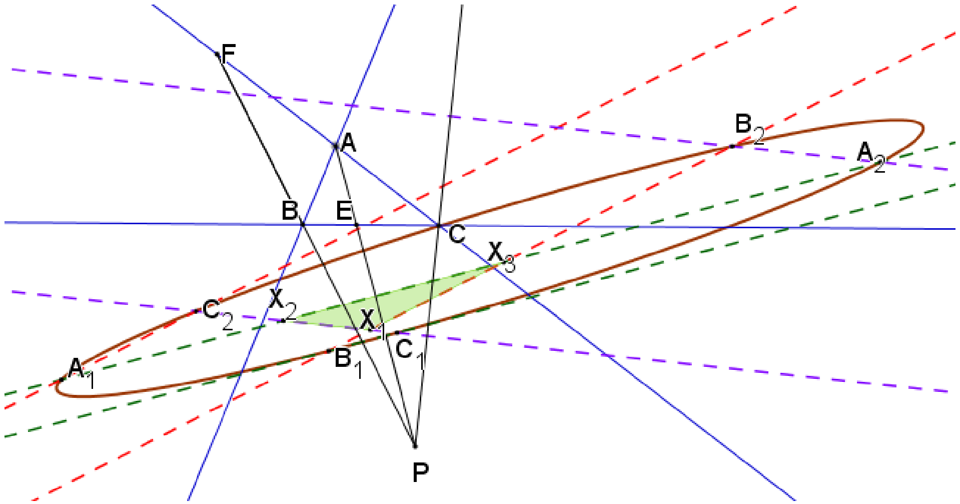
zone n°3



zone n°4



hyperbole en zone n° 7 (ou n°5 ou n°6)



ellipse en zone n°7 (ou n°5 ou n°6)