Problema 901.-

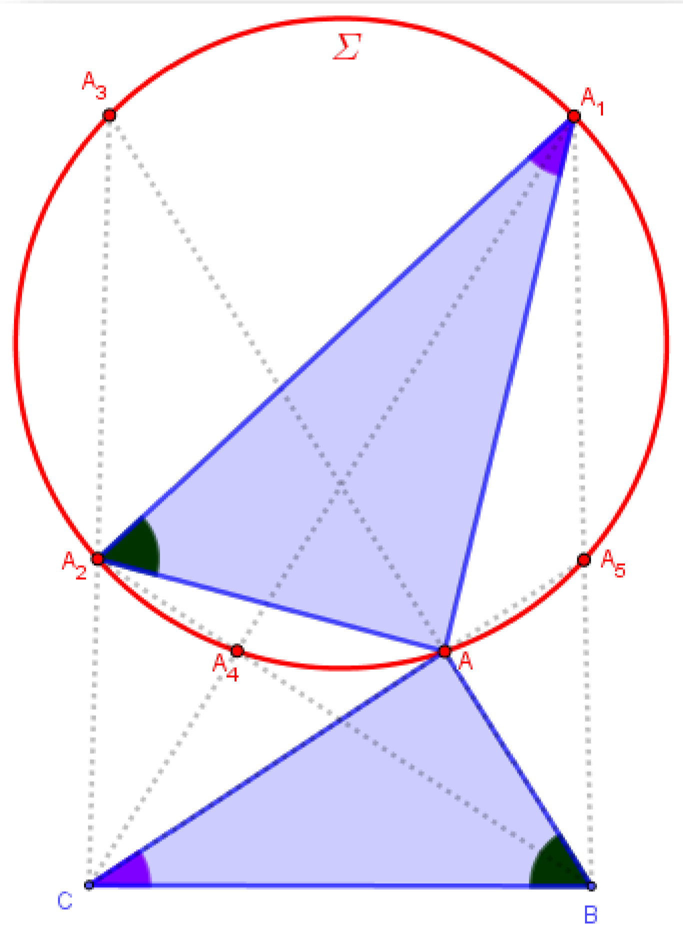
Dado un triángulo ABC se puede construir sobre BC, cinco triángulos $BCA_1, CA_2B, CBA_3, A_4CB,\ BA_5C$, semejantes a ABC. Demostrar que los seis puntos $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, están sobre la misma circunferencia, y que los triángulos AA_2A_1 y $A_4A_5A_3$ son semejantes a ABC.

Rouché, E. y de Comberousse, C.H. (1900): Traité de Géométrie.
7ª edición, revisada y aumentada por Eugéne Rouché. Premiere Part. Geometrie Plane.
Paris Gauthier Villars, imprimeur libraire. (p. 498)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

a) Si consideramos la semejanza entre los triángulos $\Delta BCA_1\ y\ \Delta BA_5C$,

$$\rightarrow \frac{BC}{BA_5} = \frac{BA_1}{BC} \rightarrow BA_1 \cdot BA_5 = BC^2 \quad (I)$$



Sea ahora el turno de la semejanza entre los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta CBA_3$,

$$\rightarrow \frac{BC}{BA_3} = \frac{BA}{BC} \rightarrow BA \cdot BA_3 = BC^2 \quad (II)$$

Por fin, si tenemos en cuenta la semejanza entre los triángulos $\Delta A_4CB\ y\ \Delta CA_2B$,

$$\rightarrow \frac{BC}{BA_2} = \frac{BA_4}{BC} \rightarrow BA_4 \cdot BA_2 = BC^2 \quad (III)$$

De las relaciones $(I), (II)\ y\ (III)$, deducimos la colinealidad de las ternas, BA_1A_5, $BAA_3\ \ y\ \ BA_4A_2$ y que los puntos $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, están sobre una misma circunferencia Σ.

Por la simetría de las construcciones, notamos también la colinealidad de las ternas $CA_2A_3,\ CA_4A_1\ \ y\ \ CAA_5$.

Vamos ahora a construir dicha circunferencia. Para ello, tenemos que, como el punto A_4 es el punto simétrico de A respecto de la mediatriz del lado BC, podemos determinar el punto A_3 a partir de la relación $BA \cdot BA_3 = BC^2$.

De este modo, construimos la circunferencia que pasa por los puntos $A,\ A_3\ y\ A_4$.

Por la simetría de la construcción, el punto A_1 sería el simétrico de A_3 respecto de la mediatriz del lado BC. Así, la recta A_1B interceptará a la circunferencia Σ en el punto A_5. Por fin, A_2 será el punto simétrico de A_5 respecto de la mediatriz del segmento BC. También podíamos determinar el punto A_2 a través de la colinealidad CA_2A_3.

b) En cuanto a la semejanza de los triángulos AA_2A_1 y $A_4A_5A_3$ entre sí, no cabe duda ya que ambos triángulos son simétricos respecto de la mediatriz del segmento BC. Por tanto, bastará comprobar la semejanza que existe entre el triángulo AA_2A_1 y el inicial, ABC. Observamos que $\measuredangle A_2A_1A = \measuredangle A_2A_3A = \measuredangle CA_3B = \measuredangle C$, por la semejanza entre los triángulos $CBA_3\ \ y\ \ ABC$.

Por otra parte, $\measuredangle A_1A_2A = \pi - \measuredangle A_1A_5A$; $\measuredangle A_1A_5A = \pi - \measuredangle CA_5B = \pi - \measuredangle B \rightarrow \measuredangle A_1A_2A\ = \measuredangle B$, por la semejanza entre los triángulos $BA_5C\ \ y\ \ ABC$.