

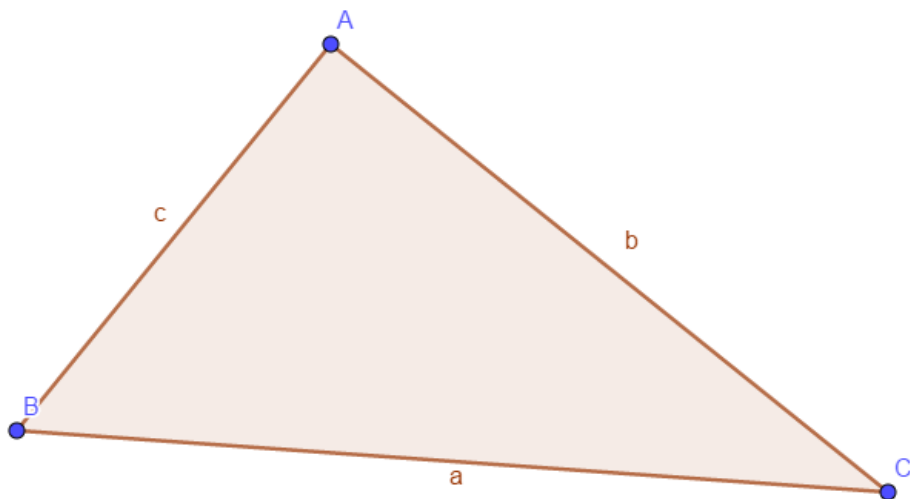
### Problema 901

53. Dado un triángulo ABC se puede construir sobre BC, cinco triángulos  $BCA_1$ ,  $CA_2B$ ,  $CBA_3$ ,  $A_4CB$ ,  $BA_5C$ , semejantes a ABC. Demostrar que los seis puntos A,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ , están sobre la misma circunferencia, y que los triángulos  $AA_2A_1$  (despiste corregido el 16 de enero de 2019.. antes el orden era otro), y  $A_4A_5A_3$  son semejantes a ABC.

Rouché , E. y de Comberousse , C.H. (1900): Traité de Géométrie . 7ª edición, revisada y aumentada por Eugène Rouché . Premiere part. Geometrie plane . Paris Gauthier Villars , imprimeur libraire . (p. 498)

Solución del director.

Sean  $\alpha$   $\beta$  y los ángulos de ABC.



Tenemos las siguientes relaciones:

$$\angle ABC = \beta, \angle BAC = \alpha, \angle BCA = \gamma$$

$$\angle A_1BC = \alpha, \angle BA_1C = \gamma, \angle BCA_1 = \beta$$

$$\angle A_2BC = \gamma, \angle BA_2C = \beta, \angle BCA_2 = \alpha$$

$$\angle A_3BC = \beta, \angle BA_3C = \gamma, \angle BCA_3 = \alpha$$

$$\angle A_4BC = \gamma, \angle BA_4C = \alpha, \angle BCA_4 = \beta$$

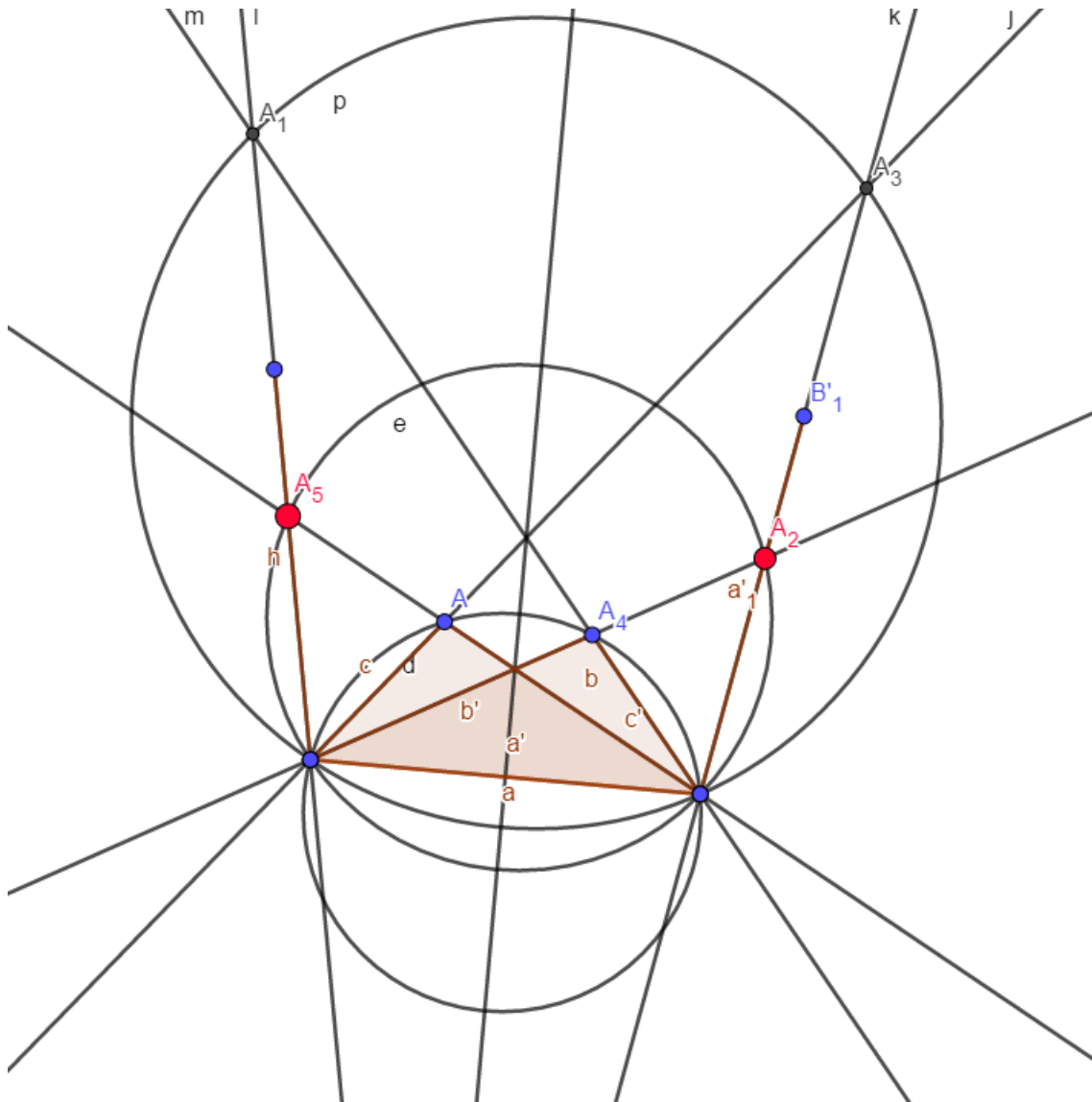
$$\angle A_5BC = \alpha, \angle BA_5C = \beta, \angle BCA_5 = \gamma$$

De donde se deduce que

A  $A_4$  B C son concíclicos.

$A_5A_2BC$  son concíclicos.

$A_1A_3BC$  son concíclicos.



Tenemos:  $\angle A_5AA_4 = \angle BAC + \angle A_4BC = \alpha + \beta, \angle A_5A_1A_4 = \gamma$ , luego  $A_5A A_4A_1$  son concíclicos.

Tenemos:  $\angle A_4AA_3 = \angle CBA = \beta, \angle A_4A_2A_3 = 180^\circ - \beta$ , luego  $A_4A A_3A_2$  son concíclicos.

Además,  $\angle A_1A_4A = \angle A_3A A_4 = \beta$ . Luego  $A_4A A_3A_1$  son concíclicos

Así, cqd,  $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , están sobre la misma circunferencia.

Observando el triángulo  $A A_2 A_1$  tenemos que  $\angle A_2AA_1 = \angle A_2A_4A_1 = \alpha, \angle A A_2A_1 = \angle A A_4A_1 = \beta$ , luego,  $AA_2A_1$  es semejante a  $ABC$ , cqd. De manera análoga  $A_4A_5A_3$  es semejante a  $ABC$ .

Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla. España